Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 10.7.2009

Höhere Mathematik II

10. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 29

Gruppenübungen

(G 24)

Gegeben sei die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_i, $i = 1,2$.

(b) Ermitteln Sie die Dimension von der Kern und das Bild der zu A_i gehörigen linearen Abbildung, $i = 1,2$.

(c) Bestimmen Sie Basen für der Kern und das Bild von A_i, $i = 1,2$.

LÖSUNG:

(a) Wir bringen zuerst die Matrizen ins Echelonform:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim r_2 \to r_2 - r_1, r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 + 2r_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt das die Rang von $A_1 = 3$ und damit ist $\dim \text{Bild} A_1 = 3$ und $\dim \text{Kern} = 0$ ($\text{Kern} A_1 = \emptyset$). Als Basis für $\text{Bild} A_1$ kanns man die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$ nehmen.

Die Bild von A_2 is von die Spalten aufgespannt und durch Spaltentransformationen bekommen wir:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim s_2 \to s_2 - 3s_1, s_3 \to s_3 - s_1, s_4 \to s_4 - s_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -8 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim s_4 \to s_4 - s_2, \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -8 & 8 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim s_1 \to s_1 + \frac{1}{2}s_3, s_2 \to s_2 - \frac{1}{2}s_3, s_4 \to s_4 + s_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim s_3 \to \frac{-1}{4}s_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es folgt das die Rang von $A_2 = 3$ und damit ist $\dim \text{Bild} A_2 = 3$ und $\dim \text{Kern} A_2 = 1$. Das $\text{Bild} A_2$ ist von die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Die sind damit eine Basis von $\text{Bild} A_2$.

Für der Kern macht man Zielen, statt Spaltentransformationen:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 - 4r_1, r_4 \to r_4 - 2r_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 + 2r_2,\ r_4 \to r_4 + 2r_2,\ r_1 \to r_1 - 3r_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim r_2 \to r_2 - \frac{1}{8}r_4,\ r_1 \to r_1 + \frac{8}{2}r_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und man sieht einfach das $A\vec{x} = 0$ nur wenn: $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$. Ein Basisvektor für der Kern ist damit

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(G 25)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der x_1-Achse und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $x_2 = x_1$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen φ, ψ, $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$. Machen Sie sich geometrisch klar, was die beiden letzten Abbildungen beschreiben.

(b) Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ so dass $\varphi(v) = v$ oder $\varphi(v) = -v$.

(c) Bestimmen Sie alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$ so dass $\psi(w) = v$ oder $\psi(w) = -w$

(D.h. v bzw. w sind Eigenvektoren von φ bzw. ψ mit Eigenwerte 1 oder -1.)

LÖSUNG:

(a) Für eine Vektor $v=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi((x_1,x_2))=(x_1,-x_2) \text{ und}\\ \psi(v) &= \psi((x_1,x_2))=(x_2,x_1)\,.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die mit Φ bzw. Ψ die matrizen für φ bzw. ψ gilt damit

$$\begin{aligned}\Phi &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\\ \Psi &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Weil Matrizen von Verknupfungen Produkten von zugehörigen Matrizen sind, sind die Matrizen von $\varphi\circ\psi$ bzw. $\psi\circ\varphi$ durch

$$\begin{aligned}\Phi\cdot\Psi &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \text{ und}\\ \Psi\cdot\Phi &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

gegeben.

(c) Man versteht sich einfach geometrisch das die mögliche Eigenwerte von ein Spiegelung sind $1,-1$ mit Eigenvektoren parallell bzw. senchrecht zu den Spiegelungsachse.

In unsere fall hat φ die Eigenvektoren

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

mit Eigenwerte 1 bzw. -1. Und ψ hat Eigenvektoren

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad w_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

mit Eigenwerte 1 bzw. -1. Man kann (und soll) natürlich dieses auch mit hilfe die Matrizen verifizieren.

(G 26) [5+3+2P]

Seien $\theta>0$, L_θ die Gerade $x_2=x_1\tan\theta$ in $\mathbb{R}^2$ und $S(\theta)$ die Spiegelung in L_θ. Sei $R(\theta)$ die rotation mit Winkel θ um Nullpunkt.

(a) Zeigen Sie, dass $S(\theta)$ und $R(\theta)$ durch die Matrizen

$$S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix},\quad \text{bzw.}\quad R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(b) Zeigen Sie, dass $S(\theta)\circ R(\theta)$ eine Spiegelung ist.

(c) Zeigen Sie, dass $R(\alpha)R(\beta)=R(\alpha+\beta)$ für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.