**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 7.7.2009

# Höhere Mathematik II

## 10. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 29

## Gruppenübungen

**(G 24)**

Gegeben sei die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von $A_i$, $i = 1, 2$.

(b) Ermitteln Sie die Dimension von der Kern und das Bild der zu $A_i$ gehörigen linearen Abbildung, $i = 1, 2$.

(c) Bestimmen Sie Basen für der Kern und das Bild von $A_i$, $i = 1, 2$.

LÖSUNG:

(a) Wir bringen zuerst die Matrizen ins Echelonform:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim r_2 \to r_2 - r_1,\, r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 + 2r_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt das die Rang von $A_1 = 3$ und damit ist $\dim \mathrm{Bild} A_1 = 3$ und $\dim \mathrm{Kern} = 0$ ($\mathrm{Kern} A_1 = \emptyset$). Als Basis für $\mathrm{Bild} A_1$ kanns man die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,0,0)^T$ , $e_2 = (0,1,0)^T$ , $e_3 = (0,0,1)^T$ nehmen.

Die Bild von $A_2$ is von die Spalten aufgespannt und durch Spaltentransformationen bekommen wir:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim s_2 \to s_2 - 3s_1, s_3 \to s_3 - s_1, s_4 \to s_4 - s_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -8 & 4 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim s_4 \to s_4 - s_2, \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -8 & 8 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim s_1 \to s_1 + \frac{1}{2}s_3,\, s_2 \to s_2 - \frac{1}{2}s_3,\, s_4 \to s_4 + s_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim s_3 \to \frac{-1}{4}s_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es folgt das die Rang von $A_2 = 3$ und damit ist $\dim \mathrm{Bild} A_2 = 3$ und $\dim \mathrm{Kern} A_2 = 1$. Das $\mathrm{Bild} A_2$ ist von die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Die sind damit eine Basis von $\mathrm{Bild} A_2$.

Für der Kern macht man Zielen, statt Spaltentransformationen:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 - 4r_1, r_4 \to r_4 - 2r_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim r_3 \to r_3 + 2r_2,\, r_4 \to r_4 + 2r_2,\, r_1 \to r_1 - 3r_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim r_2 \to r_2 - \frac{1}{8}r_4,\, r_1 \to r_1 + \frac{8}{2}r_4 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und man sieht einfach das $A\vec{x} = 0$ nur wenn: $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$. Ein Basisvektor für der Kern ist damit

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**(G 25)**

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der $x_1$-Achse und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $x_2 = x_1$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen $\varphi$, $\psi$, $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$. Machen Sie sich geometrisch klar, was die beiden letzten Abbildungen beschreiben.

(b) Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ so dass $\varphi(v) = v$ oder $\varphi(v) = -v$.

(c) Bestimmen Sie alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$ so dass $\psi(w) = v$ oder $\psi(w) = -w$

(D.h. $v$ bzw. $w$ sind Eigenvektoren von $\varphi$ bzw. $\psi$ mit Eigenwerte 1 oder $-1$.)

LÖSUNG:

(a) Für eine Vektor $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi((x_1, x_2)) = (x_1, -x_2) \text{ und} \\ \psi(v) &= \psi((x_1, x_2)) = (x_2, x_1). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die mit $\Phi$ bzw. $\Psi$ die matrizen für $\varphi$ bzw. $\psi$ gilt damit

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \Psi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil Matrizen von Verknupfungen Produkten von zugehörigen Matrizen sind, sind die Matrizen von $\varphi \circ \psi$ bzw. $\psi \circ \varphi$ durch

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \Psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und} \\ \Psi \cdot \Phi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

(c) Man versteht sich einfach geometrisch das die mögliche Eigenwerte von ein Spiegelung sind $1, -1$ mit Eigenvektoren parallell bzw. senchrecht zu den Spiegelungsachse.

In unsere fall hat $\varphi$ die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerte 1 bzw. $-1$. Und $\psi$ hat Eigenvektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerte 1 bzw. $-1$. Man kann (und soll) natürlich dieses auch mit hilfe die Matrizen verifizieren.

**(G 26) [5+3+2P]**

Seien $\theta > 0$, $L_\theta$ die Gerade $x_2 = x_1 \tan\theta$ in $\mathbb{R}^2$ und $S(\theta)$ die Spiegelung in $L_\theta$. Sei $R(\theta)$ die rotation mit Winkel $\theta$ um Nullpunkt.

(a) Zeigen Sie, dass $S(\theta)$ und $R(\theta)$ durch die Matrizen

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(b) Zeigen Sie, dass $S(\theta) \circ R(\theta)$ eine Spiegelung ist.

(c) Zeigen Sie, dass $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

(a) Sei $e_1 = (1,0)^T$ und $e_2 = (0,1)^T$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^2$. Die wirkung auf $S$ ist besonderes einfach auf die Vektoren $\tilde{f}_1 = (1, \tan\theta)^T$ (parallell zu $L$) und $\tilde{f}_2 = (\tan\theta, -1)^T$ (Senkrecht zu $L$), d.h.

$$S\left(\tilde{f}_1\right) = \tilde{f}_1, \quad S\left(\tilde{f}_2\right) = -\tilde{f}_2.$$

Zum verainfachen normieren wir zuerst die Vektoren $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$, mit $1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\tilde{f}_1}{\left|\tilde{f}_1\right|} = \frac{(1, \tan\theta)^T}{\frac{1}{\cos\theta}} = (\cos\theta, \sin\theta)^T, \\ f_2 &= \frac{\tilde{f}_2}{\left|\tilde{f}_2\right|} = \frac{(\tan\theta, -1)^T}{\frac{1}{\cos\theta}} = (\sin\theta, -\cos\theta)^T. \end{aligned}$$

Weil $f_1$ und $f_2$ linear unabhängig sind ist es klar das die Eine Basis für $\mathbb{R}^2$ ist und bezüglich diese Basis hat $S$ die Matrixdarstellung

$$S_f(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Basistransformationen bekommt man dann die Matrix bezüglich die Standardbasis:

$$\begin{aligned} S_e(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der Definition von $\cos\theta$ und $\sin\theta$ als die $x_1$ bzw. $x_2$ Koordinaten in die Einheitskreis sieht man einfach das $R(\theta)$ wirkt als

$$R(\theta)e_1 = (\cos\theta, \sin\theta)^T, R(\theta)e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta),$$

d.h.

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(b) Die verknupfung ist durch die Matrix

$$
\begin{aligned}
S(\theta)R(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta & -\sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta \\ \cos\theta\sin 2\theta - \sin\theta\cos 2\theta & -\sin\theta\sin 2\theta - \cos\theta\cos 2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\sin^2\theta\cos\theta & -\sin\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\cos^2\theta\sin\theta \\ 2\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) & -2\sin^2\theta\cos\theta - \cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta & \sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta \\ \cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta & -3\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta & \sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta \\ \cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta & -\sin^2\theta\cos\theta - \cos^3\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) & \sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ \sin\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) & -\cos\theta\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

aber diese ist genau die Matrix für eine Spiegelung in die Gerade $x_2 = x_2 \tan\frac{\theta}{2}$.

(c)

$$
\begin{aligned}
R(\alpha)R(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

(d) Die Karakteristisches Polynom ist

$$
\begin{aligned}
p_\theta(\lambda) &= \det(R(\theta) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta \\
&= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
&= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1.
\end{aligned}
$$

Es folgt das $p_\theta(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} \\
&= \cos\theta \pm i\sin\theta
\end{aligned}
$$

(Bem: für $0 \leq \theta \leq \pi$ ist $\sin\theta \geq 0$) D.h. die Eigenwerte sind

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta},\\ \lambda_2 &= \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind reeele nur falls $\theta = 0$ oder $\pi$. In die ersten Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $R(0)$ ist die Identitätsmatrix und jede Vektor in $\mathbb{R}^2$ ist ein Eigenvektor.

In die zweiten Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und $R(\theta)$ ist minus die Identitätsmatrix, d.h. $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ und jede Vektor in $\mathbb{R}^2$ ist eine Eigenvektor mit Eigenwerte $-1$.