Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 26.6.2009

Höhere Mathematik II

9. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 28

Gruppenübungen

(G 21)

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ linear ist.

(b) Bestimmen und zeichnen Sie Kerφ und Imφ.

(c) Überprufen Sie, ob der Dimensionssatz hier gilt.

LÖSUNG:

(a) Wir nehmen beliebige $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) &= \varphi\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \\ 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) \\ \lambda(2x_1 + 2x_2) + \mu(2y_2 + 2y_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) \\ \lambda(2x_1 + 2x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu(y_1 + y_2) \\ \mu(2y_2 + 2y_2) \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 2y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda\varphi(\vec{x}) + \mu\varphi(\vec{y}).
\end{aligned}$$

Es folgt aus der Definition, dass φ linear ist.

(b) $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\varphi$ dann und nur dann, wenn

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

D.h.

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{(x, -x) \quad | \quad x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und $\dim \mathrm{Ker}\varphi = 1$ weil es einfach ein Gerade ist. Es gilt auch, dass $\vec{y} \in \mathrm{Im}\varphi$ falls ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ existiert, so dass

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

es folgt, dass $\vec{y} \in \mathrm{Im}\varphi$ falls $y_2 = 2y_1$ weil dann gilt für jede $x_1 + x_2 = y_1$ dass

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{y}.$$

D.h.

$$\mathrm{Im}\varphi = \{(x, 2x) \quad | \quad x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und $\dim \mathrm{Im}\varphi = 1$, weil es auch einfach eine Gerade ist. Der Dimensionssatz sagt einfach, dass

$$2 = \dim \mathrm{Ker}\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = 1 + 1$$

. Also stimmt er auch hier.

(G 22)

Gegeben sind die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Berechnen Sie $\varphi(u_4)$.

(c) Geben Sie einen Vektor u_5 mit $\varphi(u_5) = w$ an.

Hinweis: zu (b): Geben Sie u_4 als Linearkombination von u_1, u_2, u_3 and und nutzen Sie dann aus, dass φ eine lineare Abbildung ist.

zu (c): Gehen Sie analog zu Teil (b) vor, d.h. w als Linearkombination der Bilder von u_1, u_2, u_3 angeben und dann die Eigenschaften einer linearen Abbildung ausnutzen.

LÖSUNG:

(a) Wir wissen das die Standardbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis ist und falls wir diese Basis mit hilfe der u_1, u_2, u_3 darstellen können, dann ist auch u_1, u_2, u_3 eine Basis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
u_1 + 2u_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3e_1, \\
u_1 - u_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3e_2, \\
u_3 &= e_3.
\end{aligned}$$

D.h. wir können alle e_1, e_2, e_3 mit Hilfe von u_1, u_2, u_3 darstellen und damit bilden diese eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Wir können u_4 als

$$u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4e_1 + 2e_2 + 2e_3 = \frac{4}{3}(u_1 + 2u_2) + \frac{2}{3}(u_1 - u_2) + 2u_3 = 2u_1 + 2u_2 + 2u_3$$

darstellen. Dann gilt nach linearität

$$\begin{aligned}
\varphi(u_4) &= \varphi(2u_1 + 2u_2 + 2u_3) = 2\varphi(u_1) + 2\varphi(u_2) + 2\varphi(u_3) \\
&= 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Sei $v_1 = \varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad v_2 = \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad v_3 = \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Wir wollen w mit hilfe v_1, v_2, v_3 darstellen. Nehmen an dass

$$w = av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} b+2c \\ a+2b-c \\ 3b+7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

es folgen die drei Gleichungen:

$$\begin{cases} b+2c & = 2, \\ a+2b-c & = 5, \\ 3b+7c & = 6. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssysteme lösen wir einfach wie folgt: Die letzte Gleichung minus drei mal die erste Gl. ergibt

$$c = 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

und es folgt dann, dass $b = 2$ und $a = 1$. Folglich ist

$$w = v_1 + 2v_2 = \varphi(u_1) + 2\varphi(u_2) = \varphi(u_1 + 2u_2)$$

aus der linearität von φ. Damit ist

$$u_5 = u_1 + 2u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(G 23)

Das elektrische Potential einer Punktladung e am Ursprung lautet im Vakuum:

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

wobei $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

a) Berechnen Sie den Vektor des elektrischen Feldes.

b) Berechnen Sie die Potentialdifferenz, wenn Sie das elektrische Feld längs des Einheitsvektors

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vom Punkt $(1,1,1)$ zum Punkt $(2,2,2)$ integrieren. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der direkten Berechnung der Potentialdifferenz .

LÖSUNG:

In allgemein ist der Zusammanhang zwischen Vektorfeld F und Potential φ durch

$$\nabla\varphi = F$$

gegeben. a) Sei $\vec{E}(x,y,z) = (E_1,E_2,E_3)$ der Vektor des elektrisches Feldes. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E_1(x_1,x_2,x_3) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_1}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}},\\
E_2(x_1,x_2,x_3) &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_2}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}},\\
E_3(x_1,x_2,x_3) &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_3}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\vec{E}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{r^3}.$$

b) Der Weg kann durch $\gamma(t) = (t,t,t)$, $1 \le t \le 2$ parametrisiert werden. Dann gilt $\dot{\gamma}(t) = (1,1,1)$ und

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{E}\,d\gamma &= \int_1^2 \vec{E}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt\\
&= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{(t,t,t)\cdot(1,1,1)}{(t^2+t^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt\\
&= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2 \frac{3t}{(3t^2)^{\frac{3}{2}}}dt\\
&= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt\\
&= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right] = -\frac{e}{8\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Weil $|(1,1,1)| = \sqrt{3}$ und $|(2,2,2)| = 2\sqrt{3}$ gilt

$$\begin{aligned}
V((2,2,2)) - V((1,1,1)) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
&= -\frac{e}{8\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}.
\end{aligned}$$

Die beiden Ergebnise stimmen wie erwartet überein.

Hausübungen

(H 9) [4+6P]

(a) Zeigen Sie:

Sind $\varphi : V \to U, \quad \omega : U \to W$ lineare Abbildungen, so ist ihre *Verkettung*

$$\varphi \circ \omega : V \to W, \quad v \mapsto \omega(\varphi(v))$$

ebenfalls eine lineare Abbildung. Wir schreiben auch φ^n für die n-fache verkettung von φ mit sich selbst, d.h. $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (n-mal).

(b) Sei nun $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie einfachere Ausdrücke für $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ (\varphi \circ (\varphi \circ \varphi))$, $\varphi \circ \omega$, $(\varphi \circ \omega)^2$ und $(\varphi \circ \omega)^3$. Haben Sie eine geometrische Anschauung für φ und ω?

LÖSUNG:

(a) Für beliebeige $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \omega \circ \varphi(\lambda x + \lambda y) &= \omega(\varphi(\lambda x + \mu y)) \\ (\varphi \text{ ist linear}) &= \omega(\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)) \\ (\omega \text{ ist linear}) &= \lambda \omega(\varphi(x)) + \mu \omega(\varphi(y)) \\ &= \lambda \omega \circ \varphi(x) + \mu \omega \circ \varphi(y) \end{aligned}$$

d.h. $\omega \circ \varphi$ ist linear.

(b) Wir können φ und ω mit Matrizen darstellen:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wir nennen diese Matrizen einfach $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\varphi^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \\
\varphi^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \circ (\varphi \circ (\varphi \circ \varphi)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (S^2)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
\varphi \circ \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= ST \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x+y \end{pmatrix}, \\
\omega \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= TS \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \end{pmatrix}, \\
(\varphi \circ \omega)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (ST)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ x-y \end{pmatrix}, \\
(\varphi \circ \omega)^3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= ST\,(ST)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die geometrische bedeutung für φ ist eine Drehung um die Nullpunkt mit $\frac{\pi}{2}$ (90 Grad).

Die geometrische bedeutung für ω ist eine Translation bei y in den x-richtung.