Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 26.6.2009

Höhere Mathematik II

9. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 28

Gruppenübungen

(G 21)

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ linear ist.

(b) Bestimmen und zeichnen Sie $\mathrm{Ker}\varphi$ und $\mathrm{Im}\varphi$.

(c) Überprufen Sie, ob der Dimensionssatz hier gilt.

(G 22)

Gegeben sind die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Berechnen Sie $\varphi(u_4)$.

(c) Geben Sie einen Vektor u_5 mit $\varphi(u_5) = w$ an.

Hinweis: zu (b): Geben Sie u_4 als Linearkombination von u_1, u_2, u_3 and und nutzen Sie dann aus, dass φ eine lineare Abbildung ist.

zu (c): Gehen Sie analog zu Teil (b) vor, d.h. w als Linearkombination der Bilder von u_1, u_2, u_3 angeben und dann die Eigenschaften einer linearen Abbildung ausnutzen.

(G 23)

Das elektrische Potential einer Punktladung e am Ursprung lautet im Vakuum:

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

wobei $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

a) Berechnen Sie den Vektor des elektrischen Feldes.

b) Berechnen Sie die Potentialdifferenz, wenn Sie das elektrische Feld längs des Einheitsvektors

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vom Punkt $(1,1,1)$ zum Punkt $(2,2,2)$ integrieren. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der direkten Berechnung der Potentialdifferenz .

Hausübungen

(H 9) [4+6P]

(a) Zeigen Sie:

Sind $\varphi : V \to U, \quad \omega : U \to W$ lineare Abbildungen, so ist ihre *Verkettung*

$$\varphi \circ \omega : V \to W, \quad v \mapsto \omega(\varphi(v))$$

ebenfalls eine lineare Abbildung. Wir schreiben auch φ^n für die n-fache verkettung von φ mit sich selbst, d.h. $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (n-mal).

(b) Sei nun $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie einfachere Ausdrücke für $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ (\varphi \circ (\varphi \circ \varphi))$, $\varphi \circ \omega$, $(\varphi \circ \omega)^2$ und $(\varphi \circ \omega)^3$. Haben Sie eine geometrische Anschauung für φ und ω?