Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 17.6.2009

Höhere Mathematik II

8. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 27

Gruppenübungen

(G 19)

Bestimmen Sie, ob folgende Vektorfelder Potentiale besitzen. Falls es existiert, berechnen Sie das zugehörige Potential.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(2xy, x^2-y^2\right), & (x,y) &\in \mathbb{R}^2, \\ G(x,y) &= \left(x^3-3xy^2, y^3-3x^2y\right), & (x,y) &\in \mathbb{R}^2, \\ H(x,y,z) &= \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, & (x,y,z) &\in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

(a) Es gilt $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x$ und $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$. Damit besitzt F ein Potential auf $\mathbb{R}^2$. Sei φ_F das Potential. Dann gilt $\nabla \phi_F = F$, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_F}{\partial x} &= 2xy, \\ \frac{\partial \varphi_F}{\partial y} &= x^2-y^2. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt nach Integration $\varphi_F(x,y) = x^2y + a(y)$ wobei $a(y)$ eine Funktion von y ist. Dann gilt

$$\frac{\partial \varphi_F}{\partial y} = x^2 + a'(y).$$

Vergleichen wir dies mit der zweiten Gleichung von oben folgt: $a'(y) = -y^2 \Rightarrow a(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c_F$ wobei c_F ein Konstante ist. Das Potential zu F ist

$$\varphi_F(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + c_F.$$

(b) Es gilt $\frac{\partial G_1}{\partial y} = -6xy$ und $\frac{\partial G_2}{\partial x} = -6xy$. Damit hat die Funktion G ein Potential φ_G. Dieses Potential erfüllt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_G}{\partial x} &= x^3 - 3xy^2, \\
\frac{\partial \varphi_G}{\partial y} &= y^3 - 3x^2 y.
\end{aligned}$$

Nach Integration von $\frac{\partial \varphi_G}{\partial x}$ nach x bekommt man $\varphi_G(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + b(y)$ wobei $b(y)$ ein Funktion von y ist. Es folgt, dass $\frac{\partial \varphi_G}{\partial y} = -3x^2y + b'(y)$ und nach Vergleich mit obiger Gleichung gilt $b'(y) = y^3 \Rightarrow b(y) = \frac{1}{4}y^4 + c_G$ wobei c_G ein Konstante ist. Das Potential zu G ist:

$$\varphi_G(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + c_G.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
H_1(x,y,z) &= \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
H_2(x,y,z) &= \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
H_3(x,y,z) &= \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Hier kann man die Existenz von einem Potential mit der Bedingung $\mathrm{rot} H = 0$ bestimmen. Aber wir machen es direkt, d.h. falls wir eine Potential finden dann existiert es auch. Nimm an, dass $\nabla \varphi_H = H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_H}{\partial x} &= \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \varphi_H(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + f_1(y,z), \\
\frac{\varphi_H}{\partial y} &= \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \varphi_H(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + f_2(x,z), \\
\frac{\varphi_H}{\partial z} &= \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \varphi_H(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

Durch Vergleichen von den drei obigen Gleichungen sieht man, dass

$$\varphi_H(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c_H$$

wobei c_H ein Konstante ist, ein Potential für H ist.

(G 20)

Für ein ideales Gas lautet das totale Differential der Entropie als Funktion von Volumen und Temperatur:

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV.$$

Berechnen Sie die Entropieänderung

$$\Delta_\gamma S = \int_\gamma dS$$

entlang dreier verschiedener Wege γ, ausgehend jeweils von den Zustand 1 (T_1, V_1) zum Zustand 2 (T_2, V_2):

a) isochore Erwärmung von T_1 auf T_2 bei einem Volumen V_1, anschließend isotherme Expansion von V_1 auf V_2 bei der Temperatur T_2.

b) isotherme Expansion von V_1 auf V_2 bei der Temperatur T_1, anschließend isochore Erwärmung von T_1 auf T_2 bei einem Volumen V_2.

c) gleichzeitige Änderung von Temperatur und Volumen von Zustand 1 auf Zustand 2, wobei $T = \lambda \cdot V$ gilt.

LÖSUNG:

Weil $\frac{\partial}{\partial V}\frac{C_V}{T} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{nR}{V} = 0$ und $\mathbb{R}^2$ sternförmig ist gibt es ein Potential und man kann dieses natürlich benutzen die Aufgabe zu lösen. Das heißt: Die Entropie ist eine Zustandsvariable. Aber wir rechnen einfach nach.

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_1} S &= \int_{\gamma_1} dS = \int_{T_1, V=V_1}^{T_2} dS + \int_{V_1, T=T_2}^{V_2} dS \\
&= \int_{T_1, V=V_1}^{T_2} \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV + \int_{V_1, T=T_2}^{V_2} \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV \\
&= \int_{T_1, V=V_1}^{T_2} \frac{C_V}{T} dT + \int_{V_1, T=T_2}^{V_2} \frac{nR}{V} dV \\
&= C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_V} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{nR}\right).
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_2} S &= \int_{\gamma_2} dS = \int_{V_1, T=T_1}^{V_2} dS + \int_{T_1, V=V_2}^{T_2} dS \\
&= \int_{V_1, T=T_1}^{V_2} \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV + \int_{T_1, V=V_2}^{T_2} \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV \\
&= \int_{V_1, T=T_1}^{V_2} \frac{nR}{V} dV + \int_{T_1, V=V_2}^{T_2} \frac{C_V}{T} dT \\
&= nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln\left(\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_V} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{nR}\right).
\end{aligned}$$

c) Mit $T = \lambda V$ gilt $dT = \lambda dV$,

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV = \frac{C_V}{\lambda V} \lambda dV + \frac{nR}{V} dV = (C_V + nR) \frac{dV}{V}$$

und $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda V_2}{\lambda V_1} = \frac{V_2}{V_1}$. Es folgt dass

$$\begin{aligned}
\Delta_{\gamma_3} S &= \int_{\gamma_3} dS = \int_{V=V_1, T=\lambda V}^{V_2} dS \\
&= (C_V + nR) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\
&= (C_V + nR) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\
&= C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Entropieänderung nicht von dem Weg abhängt.

Das Potenzial (falls man dieses benutzen wollte) ist einfach

$$\Phi(T, V) = C_V \ln T + nR \ln V.$$

Hausübungen

(H 8) [4+3+3P]

(a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$

ein Potential in dem Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie das die Vektorfeld

$$G(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

kein Potential in dem Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ besitzt.

LÖSUNG:

Nimm an, dass φ ist ein Potential für F. Dann gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + f(x)$$

und damit ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\left(x^2+y^2\right) + x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + f'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + f'(x)$$

und wir wissen, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ damit ist $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$ ein Konstante. Es folgt, dass

$$\varphi(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + c$$

ein Potential für $F(x,y)$ ist.

(b) Falls G ein Potential besitzt dann ist das Kurvintegrale $\int_\gamma G d\gamma$ nur von den Endpunkten von γ abhängig. Insbesondere ist das Integral über geschlossene Kurven 0. Betrachten Sie deswegen den Einheitskreis $\gamma : \{\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$ mit $\dot{\gamma}(t) = (sint, \cos t)$. Das Kurvintegrale von G über γ ist dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma G d\gamma &= \int_0^{2\pi} G(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} |(-\sin t, \cos t)|^2\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Damit kann G kein Potential in Ω besitzen.