



Höhere Mathematik II

7. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 26

Gruppenübungen

(G 16)

Berechnen Sie die folgenden Kurvintegrale in der Ebene:

$$\int_{\gamma} F \cdot dx$$

für

- (a) $F(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2, x_1 - x_2 x_1)$ und γ ist die Kurve $(x_1, x_2) = (4t, 3t)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (b) $F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2, x_2)$ und γ ist die Gerade vom Punkt $(-1, 0)$ zum Punkt $(0, 1)$.
- (c) $F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2, x_2)$ und γ ist der Teil des positiv orientierten Einheitskreises, der die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ verbindet.

LÖSUNG:

- (a) Es gilt $dx_1 = 4dt$ und $dx_2 = 3dt$ und das Integral ist

$$\begin{aligned} I &= \int_K x_1^2 x_2 dx_1 + (x_1 - x_1 x_2) dx_2 \\ &= \int_0^1 (4t)^2 3t 4dt + (4t - 12t^2) 3dt \\ &= 12 \int_0^1 16t^3 + t - 3t^2 dt \\ &= 12 \left[4t^4 + \frac{1}{2}t^2 - t^3 \right]_0^1 = 12 \left(\frac{7}{2} \right) = 42. \end{aligned}$$

(b) Zur Parametrisierung von K schreiben wir die Kurve als $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ und diese ist durch $\gamma(0) = (-1, 0)$ und $\gamma(1) = (0, 1)$ eindeutig bestimmt. Man sieht einfach das $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (t-1, t)$ und $dx_1 = dx_2 = dt$. Das Integral ist dann

$$\begin{aligned} \int_K F \cdot dx &= \int_K (x_1^2 - x_2) dx_1 + x_2 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left((t-1)^2 - t \right) dt + t dt \\ &= \int_0^1 t^2 + 1 - 2t dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + t - t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(c) Die natürliche Parametrisierung vom Einheitskreis ist $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\cos t, \sin t)$, $dx_1 = -\sin t dt$ und $dx_2 = \cos t dt$. Dann ist die Kurve K einfach der Teil mit $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ und orientiert mit Anfang am $t = \pi$ und Ende $t = \frac{\pi}{2}$, d.h.

$$\begin{aligned} \int_K F \cdot dx &= \int_K (x_1^2 - x_2) dx_1 + x_2 dx_2 \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin t) (-\sin t) dt + \sin t \cos t dt \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t + \sin^2 t + \sin t \cos t dt \\ &\quad (\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)) \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{2} \sin^2 t \right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \\ &= -\frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} (\cos \pi)^3 + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} (\sin \pi)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(G 17)

Berechnen Sie die Länge folgender Kurve

$$\gamma: t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

LÖSUNG:

Wir wollen das Integral $l(\gamma) = \int_{\gamma} ds$ berechnen. Es gilt

$$ds = |\dot{\gamma}(t)| dt = |(-\sin t, \cos t, 1)| dt = \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t} dt = \sqrt{2} dt$$

damit gilt

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = \sqrt{2} \int_0^1 dt = \sqrt{2}.$$

(G 18)

Die Mischungsentropie einer idealen Mischung, bestehend aus K Komponenten, lautet:

$$\Delta_M S^o = -R \cdot \sum_{k=1}^K x_k \ln x_k,$$

wobei die x_k die Molenbrüche der einzelnen Komponenten sind und R eine positive Konstante.

- (a) Nehmen Sie zunächst an, dass die Molenbrüche unabhängig voneinander sind ($x_k \in \mathbb{R}^+$). Zeigen Sie, dass nur ein einziges Extremum – ein Maximum – existiert. Welche Werte würden die x_k dort annehmen?
- (b) Die Molenbrüche in einer Mischung sind nun nicht unabhängig, sondern erfüllen die Bedingung

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Mischungsentropie in Abhängigkeit vom Molenbruch x_1 für eine binäre Mischung ($K = 2$). Bei welcher Zusammensetzung wird die Entropie maximal? Berechnen Sie diese Zusammensetzung, indem Sie die Variable x_2 durch die Variable x_1 ersetzen.

- (c) Für eine größere Variablenzahl benutzt man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren zur Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen. Bestimmen Sie die Zusammensetzung mit maximaler Entropie einer Mischung aus K Komponenten mit Hilfe dieser Methode.

LÖSUNG:

(a) Sei $f(x_1, \dots, x_k) = \Delta_M S^o$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -R \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k \ln x_k) = -R(\ln x_k + 1)$$

und damit

$$\nabla f = -R(\ln x_1 + 1, \dots, \ln x_K + 1).$$

Es folgt, dass $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \ln x_k + 1 = 0$ für $k = 1, \dots, K$. D.h. $\ln x_k = -1$ für $k = 1, \dots, K \Leftrightarrow x_k = e^{-1}$ für $k = 1, \dots, K$. Es gibt deshalb nur eine Lösung zu der Gleichung $\nabla f = 0$,

$$(x_1, \dots, x_k) = (e^{-1}, \dots, e^{-1}).$$

Weil

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = -R \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln x_k + 1) = \begin{cases} -\frac{R}{x_k}, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

ist die Hessematrix im Punkt (e^{-1}, \dots, e^{-1}) einfach $-Re \cdot I_K$ wobei I_K die $K \times K$ Einheitsmatrix ist. Diese Matrix ist offensichtlich negativ definit so ist der Punkt (e^{-1}, \dots, e^{-1}) ist ein isoliertes lokales Maximum.

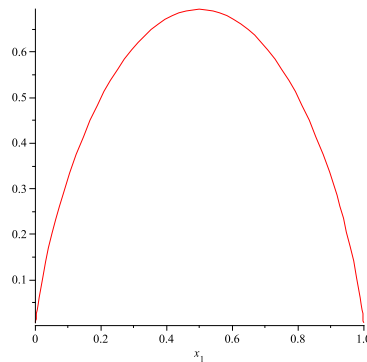
(b) Mit $K = 2$ gilt sogar $x_1 + x_2 = 1$ und die Mischungsentropie ist

$$f(x_1) = f(x_1, x_2) = f(x_1, 1 - x_1) = -R(x_1 \ln x_1 + (1 - x_1) \ln(1 - x_1)).$$

Die Extrema von f findet man einfach durch Errechnung der Nullstellen der Ableitung

$$f'(x_1) = -R(\ln x_1 + 1 - \ln(1 - x_1) - 1) = -R(\ln x_1 - \ln(1 - x_1)) = 0$$

$\Leftrightarrow \ln x_1 = \ln(1 - x_1) \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$. Die Entropie ist deshalb maximal genau wenn sich die Mischung zu gleichen Teilen aus den beiden Komponenten zusammensetzt, d.h. $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Für die Skizze sieht man leicht, dass im Endpunkt gilt $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1) = -R \lim_{x_1 \rightarrow 0} (x_1 \ln x_1) = 0$ und auch $\lim_{x_1 \rightarrow 1} f(x_1) = 0$. Weiter ist $f(\frac{1}{2}) = -R \ln \frac{1}{2} > 0$.



Skizze von $f(x_1)$:

(c) Für die Maximierung der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x_1, \dots, x_K) = \sum_{k=1}^K x_k - 1 = 0$ bilden wir die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_k, \lambda) &= f(x_1, \dots, x_K) + \lambda g(x_1, \dots, x_K) \\ &= -R \sum x_k \ln x_k + \lambda (\sum x_k - 1). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_k} &= -R(\ln x_k + 1) + \lambda = 0, \forall k, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum x_k - 1 = 0\end{aligned}$$

Aus den ersten K Gleichungen folgt, dass $\ln x_k + 1 = \frac{\lambda}{R} \Leftrightarrow \ln x_k = \frac{\lambda}{R} - 1 \Leftrightarrow x_k = e^{\frac{\lambda}{R} - 1} = c$ für alle k . D.h. alle x_k sind gleich. Aus der letzten Gleichung bekommt man dann $Kx_k = 1 \Leftrightarrow x_k = \frac{1}{K}$. Der Punkt $(x_1, \dots, x_K) = (\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K})$ ist damit eine relative Extremstelle und wenn wir die Randpunkte, $x_k \rightarrow 1$ (und $x_j \rightarrow 0, j \neq k$) betrachten sieht man, dass $f \rightarrow 0$ und weil $f(\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K}) = -R \ln \frac{1}{K} > 0$ ist der Punkt $(\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K})$ ein relatives Maximum. Es folgt, dass die Zusammensetzung eine Mischung mit maximaler Entropie ist dann erreicht, wenn jede Komponente den gleichen Anteil besitzt, d.h.

$$(x_1, \dots, x_K) = \left(\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K} \right).$$

Hausübungen

(H 7) [4+3+3P]

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

- $\int_{\gamma} y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy$ wobei γ die Kurve $y = x^2$ vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(2, 4)$ ist.
- $\int_{\gamma} F \cdot d\vec{x}$ für $F(x, y) = (x^2 + xy, y^2 - xy)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ und γ ist die Gerade von $(0, 0)$ nach $(2, 2)$.
- $\int_{\gamma} F \cdot d\vec{x}$ für $F(x, y) = (x^2 + xy, y^2 - xy)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ und γ ist die Parabel $x^2 = 2y$ von $(0, 0)$ nach $(2, 2)$.