Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 18.6.2009

Höhere Mathematik II

7. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 26

Gruppenübungen

(G 16)

Berechnen Sie die folgenden Kurvintegrale in der Ebene:

$$\int_\gamma F \cdot dx$$

für

(a) $F(x_1,x_2) = \left(x_1^2 x_2, x_1 - x_2 x_1\right)$ und γ ist die Kurve $(x_1,x_2) = (4t,3t)$, $0 \le t \le 1$.

(b) $F(x_1,x_2) = \left(x_1^2 - x_2, x_2\right)$ und γ ist die Gerade vom Punkt $(-1,0)$ zum Punkt $(0,1)$.

(c) $F(x_1,x_2) = \left(x_1^2 - x_2, x_2\right)$ und γ ist der Teil des positiv orientierten Einheitskreises, der die Punkte $(-1,0)$ und $(0,1)$ verbindet.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $dx_1 = 4dt$ und $dx_2 = 3dt$ und das Integral ist

$$\begin{aligned}
I &= \int_K x_1^2 x_2 dx_1 + (x_1 - x_1 x_2)\, dx_2 \\
&= \int_0^1 (4t)^2\, 3t4dt + \left(4t - 12t^2\right) 3dt \\
&= 12 \int_0^1 16t^3 + t - 3t^2 dt \\
&= 12\left[4t^4 + \frac{1}{2}t^2 - t^3\right]_0^1 = 12\left(\frac{7}{2}\right) = 42.
\end{aligned}$$

(b) Zur Parametrisierung von K schreiben wir die Kurve als $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ und diese ist durch $\gamma(0) = (-1,0)$ und $\gamma(1) = (0,1)$ eindeutig bestimmt. Man sieht einfach das $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (t-1, t)$ und $dx_1 = dx_2 = dt$. Das Integral ist dann

$$\begin{aligned}
\int_K F \cdot dx &= \int_K \left(x_1^2 - x_2\right) dx_1 + x_2 dx_2 \\
&= \int_0^1 \left((t-1)^2 - t\right) dt + t dt \\
&= \int_0^1 t^2 + 1 - 2t dt \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3 + t - t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Die natürliche Parametrisierung vom Einheitskreis ist $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\cos t, \sin t)$, $dx_1 = -\sin t\, dt$ und $dx_2 = \cos t\, dt$. Dann ist die Kurve K einfach der Teil mit $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ und orientiert mit Anfang am $t = \pi$ und Ende $t = \frac{\pi}{2}$, d.h.

$$\begin{aligned}
\int_K F \cdot dx &= \int_K \left(x_1^2 - x_2\right) dx_1 + x_2 dx_2 \\
&= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - \sin t\right)(-\sin t)\, dt + \sin t \cos t\, dt \\
&= \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t + \sin^2 t + \sin t \cos t\, dt \\
&\quad (\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)) \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right]_\pi^{\frac{\pi}{2}} + \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt \\
&= -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}(\cos\pi)^3 + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\sin\pi)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_\pi^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(G 17)

Berechnen Sie die Länge folgender Kurve

$$\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

LÖSUNG:

Wir wollen das Integral $l(\gamma) = \int_\gamma ds$ berechnen. Es gilt

$$ds = |\dot{\gamma}(t)|\,dt = |(-\sin t, \cos t, 1)|\,dt = \sqrt{1+\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = \sqrt{2}dt$$

damit gilt

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 dt = \sqrt{2}.$$

(G 18)

Die Mischungsentropie einer idealen Mischung, bestehend aus K Komponenten, lautet:

$$\Delta_M S^o = -R \cdot \sum_{k=1}^{K} x_k \ln x_k,$$

wobei die x_k die Molenbrüche der einzelnen Komponenten sind und R eine positive Konstante.

(a) Nehmen Sie zunächst an, dass die Molenbrüche unabhängig voneinander sind ($x_k \in \mathbb{R}^+$). Zeigen Sie, dass nur ein einziges Extremum – ein Maximum – existiert. Welche Werte würden die x_k dort annehmen?

(b) Die Molenbrüche in einer Mischung sind nun nicht unabhängig, sondern erfüllen die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{K} x_k = 1.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Mischungsentropie in Abhängigkeit vom Molenbruch x_1 für eine binäre Mischung ($K = 2$). Bei welcher Zusammensetzung wird die Entropie maximal? Berechnen Sie diese Zusammensetzung, indem Sie die Variable x_2 durch die Variable x_1 ersetzen.

(c) Für eine größere Variablenzahl benutzt man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren zur Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen. Bestimmen Sie die Zusammensetzung mit maximaler Entropie einer Mischung aus K Komponenten mit Hilfe dieser Methode.

LÖSUNG:

(a) Sei $f(x_1, \cdots, x_k) = \Delta_M S^o$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -R\frac{\partial}{\partial x_k}(x_k \ln x_k) = -R(\ln x_k + 1)$$

und damit

$$\nabla f=-R\left(\ln x_1+1,\ldots,\ln x_K+1\right).$$

Es folgt, dass $\nabla f=0 \Leftrightarrow \ln x_k+1=0$ für $k=1,\ldots,K$. D.h. $\ln x_k=-1$ für $k=1,\ldots,K \Leftrightarrow$ $x_k=e^{-1}$ für $k=1,\ldots K$. Es gibt deshalb nur eine Lösung zu der Gleichung $\nabla f=0$,

$$\left(x_1,\ldots,x_k\right)=\left(e^{-1},\ldots,e^{-1}\right).$$

Weil

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}=-R\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\ln x_k+1\right)=\begin{cases}-\frac{R}{x_k}, & j=k,\\ 0, & j\neq k\end{cases}$$

ist die Hessematrix im Punkt $\left(e^{-1},\ldots,e^{-1}\right)$ einfach $-Re\cdot I_K$ wobei I_K die $K\times K$ Einheitsmatrix ist. Diese Matrix ist offensichtlich negativ definit so ist der Punkt $\left(e^{-1},\ldots,e^{-1}\right)$ ist ein isoliertes lokales Maximum.

(b) Mit $K=2$ gilt sogar $x_1+x_2=1$ und die Mischungsentropie ist

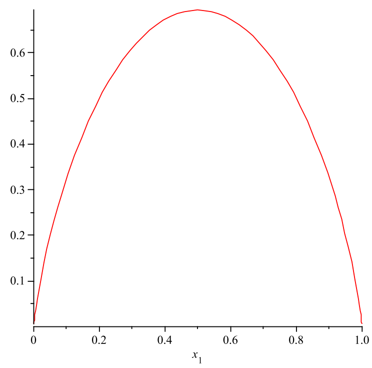
$$f\left(x_1\right)=f\left(x_1,x_2\right)=f\left(x_1,1-x_1\right)=-R\left(x_1\ln x_1+\left(1-x_1\right)\ln\left(1-x_1\right)\right).$$

Die Extrema von f findet man einfach durch Errechnung der Nullstellen der Ableitung

$$f'\left(x_1\right)=-R\left(\ln x_1+1-\ln\left(1-x_1\right)-1\right)=-R\left(\ln x_1-\ln\left(1-x_1\right)\right)=0$$

$\Leftrightarrow \ln x_1=\ln\left(1-x_1\right) \Leftrightarrow x_1=1-x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}$. Die Entropie ist deshalb maximal genau wenn sich die Mischung zu gleichen Teilen aus den beiden Komponenten zusammen setzt, d.h. $x_1=x_2=\frac{1}{2}$. Für die Skizze sieht man leicht, dass im Endpunkt gilt $\lim_{x_1\to 0} f\left(x_1\right)=-R\lim_{x_1\to 0}\left(x_1\ln x_1\right)=0$ und auch $\lim_{x_1\to 1} f\left(x_1\right)=0$. Weiter ist $f\left(\frac{1}{2}\right)=-R\ln\frac{1}{2}>0$.

Skizze von $f\left(x_1\right)$:



(c) Für die Maximierung der Funktion f unter der Nebenbedingung $g\left(x_1,\ldots,x_K\right)=\sum_{k=1}^{K} x_k-1=0$ bilden wir die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}L\left(x_1,\ldots,x_k,\lambda\right) &= f\left(x_1,\ldots,x_K\right)+\lambda g\left(x_1,\ldots,x_K\right)\\ &= -R\sum x_k\ln x_k+\lambda\left(\sum x_k-1\right).\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_k} &= -R(\ln x_k + 1) + \lambda = 0, \forall k,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum x_k - 1 = 0\end{aligned}$$

Aus den ersten K Gleichungen folgt, dass $\ln x_k + 1 = \frac{\lambda}{R} \Leftrightarrow \ln x_k = \frac{\lambda}{R} - 1 \Leftrightarrow x_k = e^{\frac{\lambda}{R}-1} = c$ für alle k. D.h. alle x_k sind gleich. Aus der letzten Gleichung bekommt man dann $Kx_k = 1 \Leftrightarrow x_k = \frac{1}{K}$. Der Punkt $(x_1, \ldots, x_K) = \left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right)$ ist damit eine relative Extremstelle und wenn wir die Randpunkten, $x_k \to 1$ (und $x_j \to 0$, $j \neq k$) betrachten sieht man, dass $f \to 0$ und weil $f\left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right) = -R \ln \frac{1}{K} > 0$ ist der Punkt $\left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right)$ ein relatives Maximum. Es folgt, dass die Zusammensetzung eine Mischung mit maximaler Entropie ist dann erreicht, wenn jeden Komponente den gleichen Anteil besitzt, d.h.

$$(x_1, \ldots, x_K) = \left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right).$$

Hausübungen

(H 7) [4+3+3P]

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

(a) $\int_\gamma y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy$ wobei γ die Kurve $y = x^2$ vomPunkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,4)$ ist.

(b) $\int_\gamma F \cdot d\vec{x}$ für $F(x,y) = \left(x^2 + xy, y^2 - xy\right)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ und γ ist die Gerade von $(0,0)$ nach $(2,2)$.

(c) $\int_\gamma F \cdot d\vec{x}$ für $F(x,y) = \left(x^2 + xy, y^2 - xy\right)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ und γ ist die Parabel $x^2 = 2y$ von $(0,0)$ nach $(2,2)$.

LÖSUNG:

(a) Die Kurve ist einfach durch x parametrisiert und mit $y = x^2$ gilt $dy = 2xdx$ und damit

$$\begin{aligned}\int_\gamma y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy &= \int_1^2 x^2 \ln \frac{x^2}{x^2} dx - \frac{x}{x^2} 2xdx\\ &= \int_1^2 x^2 \ln 1 - 2dx\\ &= -2 \int_1^2 dx = -2 [x]_1^2 = -2(2-1) = -2.\end{aligned}$$

(b) Man kann die Gerade durch $\gamma(t) = (t,t)$, $0 \leq t \leq 2$ parametrisieren (d.h. die Kurve ist $y = x$). Dann gilt $dx = dy = dt$ und das Integral ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\mathbf{x} &= \int_\gamma x^2 + xydx + \left(y^2 - xy\right) dy \\
&= \int_0^2 t^2 + t^2 + t^2 - t^2 dt \\
&= \int_0^2 2t^2 dt = \frac{2}{3}\left[t^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

(c) Die Parabel ist einfach durch $x = t$ und $y = \frac{1}{2}t^2$parametrisiert, d.h. $\gamma(t) = (t, y(t)) = \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$, $0 \leq t \leq 2$ und $dx = dt$ und $dy = tdt$. Die Integral ist dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\mathbf{x} &= \int_\gamma x^2 + xydx + \left(y^2 - xy\right) dy \\
&= \int_0^2 t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^3\right) tdt \\
&= \int_0^2 t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^5 - \frac{1}{2}t^4 dt \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{24}t^6 - \frac{1}{10}t^5\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{3}8 + \frac{1}{8}16 + \frac{1}{24}64 - \frac{1}{10}32 \\
&= \frac{8}{3} + 2 + \frac{8}{3} - \frac{16}{5} = \frac{16}{3} - \frac{16}{5} + 2 \\
&= \frac{80 + 30 - 48}{15} = \frac{80 - 18}{15} = \frac{62}{15}.
\end{aligned}$$