Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 4.6.2009

Höhere Mathematik II

7. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 26

Gruppenübungen

(G 16)

Berechnen Sie die folgenden Kurvintegrale in der Ebene:

$$\int_\gamma F \cdot dx$$

für

(a) $F(x_1, x_2) = \left(x_1^2 x_2, x_1 - x_2 x_1\right)$ und γ ist die Kurve $(x_1, x_2) = (4t, 3t)$, $0 \leq t \leq 1$.

(b) $F(x_1, x_2) = \left(x_1^2 - x_2, x_2\right)$ und γ ist die Gerade vom Punkt $(-1, 0)$ zum Punkt $(0, 1)$.

(c) $F(x_1, x_2) = \left(x_1^2 - x_2, x_2\right)$ und γ ist der Teil des positiv orientierten Einheitskreises, der die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ verbindet.

(G 17)

Berechnen Sie die Länge folgender Kurve

$$\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(G 18)

Die Mischungsentropie einer idealen Mischung, bestehend aus K Komponenten, lautet:

$$\Delta_M S^o = -R \cdot \sum_{k=1}^{K} x_k \ln x_k,$$

wobei die x_k die Molenbrüche der einzelnen Komponenten sind und R eine positive Konstante.

(a) Nehmen Sie zunächst an, dass die Molenbrüche unabhängig voneinander sind ($x_k \in \mathbb{R}^+$). Zeigen Sie, dass nur ein einziges Extremum – ein Maximum – existiert. Welche Werte würden die x_k dort annehmen?

(b) Die Molenbrüche in einer Mischung sind nun nicht unabhängig, sondern erfüllen die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{K} x_k = 1.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Mischungsentropie in Abhängigkeit vom Molenbruch x_1 für eine binäre Mischung ($K = 2$). Bei welcher Zusammensetzung wird die Entropie maximal? Berechnen Sie diese Zusammensetzung, indem Sie die Variable x_2 durch die Variable x_1 ersetzen.

(c) Für eine größere Variablenzahl benutzt man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren zur Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen. Bestimmen Sie die Zusammensetzung mit maximaler Entropie einer Mischung aus K Komponenten mit Hilfe dieser Methode.

Hausübungen

(H 7) [4+3+3P]

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

(a) $\int_\gamma y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy$ wobei γ die Kurve $y = x^2$ vomPunkt $(1,1)$ zum Punkt $(2,4)$ ist.

(b) $\int_\gamma F \cdot d\vec{x}$ für $F(x,y) = \left(x^2 + xy, y^2 - xy\right)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ und γ ist die Gerade von $(0,0)$ nach $(2,2)$.

(c) $\int_\gamma F \cdot d\vec{x}$ für $F(x,y) = \left(x^2 + xy, y^2 - xy\right)$, $d\vec{x} = (dx, dy)$ und γ ist die Parabel $x^2 = 2y$ von $(0,0)$ nach $(2,2)$.