



Höhere Mathematik II

6. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 24

Gruppenübungen

(G 14)

(a) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x, y) = e^{xy}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x + y = 1$$

im \mathbb{R}^2 .

(b) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x, y, z) = xyz$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

im Gebiet $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$.

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\nabla f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

und

$$\nabla g(x, y) = (1, 1).$$

Wir suchen Punkte, so dass die Gradienten parallel sind, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$ so dass $\nabla f = \lambda \nabla g$. Wir bekommen dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} ye^{xy} &= \lambda, \\ xe^{xy} &= \lambda, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei sieht man, dass $x = y$ und aus der Nebenbedingung folgt, dass $x = y = \frac{1}{2}$. Es ist klar, dass wenn $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x, 1-x) = e^{x(1-x)} \rightarrow 0$ damit ist der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein Maximum. Der maximale Wert von $f(x, y) = e^{xy}$ und der Geraden $g(x, y) = x + y = 1$ ist dann $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{4}}$.

(b) Es gilt

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

und

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Wir suchen Punkte so dass die Gradienten parallel sind, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$, so dass $\nabla f = \lambda \nabla g$. Wir bekommen dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} yz &= \lambda, \\ xz &= \lambda, \\ xy &= \lambda, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei sieht man, dass $xz = yz \neq 0 \Rightarrow x = y$. Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt $z = y$. Also gilt $x = y = z$ und $3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Da $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$ und z.B. $f(0, 0, 1) = 0$ folgt, dass der Punkt ein Maximum ist und der maximale Wert von $f(xyz) = xyz$ und der Ebene $x + y + z = 1$ ist $\frac{1}{9}$.

(G 15)

Bestimmen Sie die Maxima für die Quadrate folgender reeller Orbitale des Wasserstoffatoms:

$$\begin{aligned} \psi_{2p_x}(r, \theta, \varphi) &= Nr \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ \psi_{3d_{z^2}}(r, \theta, \varphi) &= Nr^2 \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right) (3 \cos^2(\theta) - 1), \end{aligned}$$

wobei $a_0 > 0$ und $N > 0$ Konstanten sind und $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ ((r, θ, φ) sind einfach die Kugelkoordinaten aus H5(a)).

LÖSUNG:

Sei

$$f(r, \theta, \varphi) = \psi_{2p_x}(r, \theta, \varphi)^2 = N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi).$$

Dann berechnen wir zuerst die erste Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) \left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\varphi) \\ &= N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin(2\theta) \cos^2(\varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin^2(\theta) \sin(2\varphi)$$

und dann die zweite Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) \left\{r - \frac{2r}{a_0} - \frac{1}{a_0} \left[2r - \frac{r^2}{a_0}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} = 2N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\varphi) \left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} = -2N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 2N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \cos(2\theta) \cos^2(\varphi),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta} = -2N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin(2\theta) \sin(2\varphi),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -2N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sin^2(\theta) \cos(2\varphi).$$

Jetzt können wir die kritischen Punkte finden. Es gilt $\nabla f(r, \theta, \varphi) = 0 \Leftrightarrow$

$$0 = \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) \left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\}$$

$$0 = r^2 \sin(2\theta) \cos^2(\varphi)$$

$$0 = r^2 \sin^2(\theta) \sin(2\varphi)$$

Man sieht sofort folgende kritische Punkte

$$\begin{aligned} r &= 0 \text{ und } \theta, \varphi \text{ beliebig (Nullpunkt)} \\ \theta &= 0 \text{ oder } \pi \text{ und } r, \varphi \text{ beliebig (z-Achse)} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \text{ oder } -\frac{\pi}{2} \text{ und } r, \theta \text{ beliebig (yz-Ebene)} \end{aligned}$$

Weil $f \geq 0$ und $f = 0$ ist in den obigen Fällen sind diese Punkte lokale Minima.

Die übrigen Fälle sind, wenn $\sin \theta \neq 0$ und $\cos \varphi \neq 0$. Dann ist $\sin(2\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \in \{0, \pi\}$ und $\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (oder $\theta = 0$ aber das ist in den obigen Fällen einbezogen). Aus der erste Gleichung folgt dann, dass $r = 2a_0$ (weil der Fall $r = 0$ ist auch schon behandelt).

Wir haben dann zwei kritische Punkte $(2a_0, \frac{\pi}{2}, 0)$ und $(2a_0, \frac{\pi}{2}, \pi)$ die auf der x -Achse liegen. Die Hessematrix ist

$$H\left(f, 2a_0, \frac{\pi}{2}, 0\right) = H\left(f, 2a_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -2N^2e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -8N^2a_0^2e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -8N^2a_0^2e^{-2} \end{pmatrix}$$

und die ist offensichtlich negativ definit. Damit ist der Punkte $(2a_0, \frac{\pi}{2}, 0)$ und $(2a_0, \frac{\pi}{2}, \pi)$ lokales Maximum.

(b) Sei

$$g(r, \theta, \varphi) = \psi_{3d_2}(r, \theta, \varphi)^2 = N^2 r^4 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) (3 \cos^2 \theta - 1)^2.$$

Wie in (a) sieht man direkt, dass $r = 0$ (θ, φ beliebig) und $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (r, φ beliebig) Minima entsprechen. Um andere Extremalstellen zu finden berechnen wir zuerst die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= N^2 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) (3 \cos^2 \theta - 1)^2 \left\{ 4r^3 - \frac{2r^4}{3a_0} \right\}, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= N^2 r^4 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) 2(3 \cos^2 \theta - 1) 6 \cos \theta (-\sin \theta) \\ &= -6N^2 r^4 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) (3 \cos^2 \theta - 1) \sin 2\theta, \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Und die zweiten Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= N^2 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) (3 \cos^2 \theta - 1)^2 \left\{ 12r^2 - \frac{8r^3}{3a_0} - \frac{2}{3a_0} \left(4r^3 - \frac{2r^4}{3a_0} \right) \right\}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -6N^2 r^4 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) \{-3 \sin(2\theta) \sin(2\theta) + 2(3 \cos^2 \theta - 1) \cos 2\theta\}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} &= -6N^2 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) (3 \cos^2 \theta - 1) \sin 2\theta \left\{ 4r^3 - \frac{2r^4}{3a_0} \right\}\end{aligned}$$

(alle Ableitungen mit φ sind Null). Um die kritische Stellen zu finden setzen wir $\nabla g = 0$
 \Leftrightarrow

$$\begin{aligned}0 &= (3 \cos^2 \theta - 1)^2 \left\{ 4r^3 - \frac{2r^4}{3a_0} \right\} = (3 \cos^2 \theta - 1)^2 4r^3 \left\{ 1 - \frac{r}{6a_0} \right\}, \\ 0 &= r^4 (3 \cos^2 \theta - 1) \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Und falls $r \neq 0$ und $\theta \neq \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ dann muss $\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ und $r = 6a_0$.
 Die Hessematrix ist

$$\begin{aligned}H(g, 6a_0, 0, \varphi) &= \begin{pmatrix} -576a_0^2 N^2 e^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -4 \cdot 6^5 N^2 a_0^4 e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H\left(g, 6a_0, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) &= \begin{pmatrix} -144a_0^2 N^2 e^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot 6^5 N^2 a_0^4 e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und man sieht einfach, dass die beiden negativ semi-definit sind und die entsprechende Punkten sind damit Maxima für $|\psi_{d_2}|^2$. Die Menge $\{(r, \theta, \varphi) = (6a_0, 0, \varphi) \mid -\pi < \varphi \leq \pi\}$ besteht einfach aus dem Punkt im \mathbb{R}^3 mit $x = y = 0$ und $z = 6a_0$. Die Menge

$$\left\{ (r, \theta, \varphi) = \left(6a_0, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) \mid -\pi < \varphi \leq \pi \right\}$$

ist ein Kreis auf der xy -Ebene mit Radius $6a_0$.

Hausübungen

(H 6) [5+5P]

(a) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x, y, z) = xy\sqrt{z}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

im Gebiet $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$.

(b) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$h(x, y, z) = x + y + z$$

unter der Nebenbedingung

$$k(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.