Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 29.5.2009

Höhere Mathematik II

6. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 24

Gruppenübungen

(G 14)

(a) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x,y) = e^{xy}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x + y = 1$$

im $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x,y,z) = xyz$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

im Gebiet $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$.

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right)$$

und

$$\nabla g(x,y) = (1,1).$$

Wir suchen Punkte, so dass die Gradienten parallell sind, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$ so dass $\nabla f = \lambda \nabla g$. Wir bekommen dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} ye^{xy} &= \lambda, \\ xe^{xy} &= \lambda, \\ x+y &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei sieht man, dass $x = y$ und aus der Nebenbedingung folgt, dass $x = y = \frac{1}{2}$. Es ist klar, dass wenn $x \to -\infty$ gilt $f(x, 1-x) = e^{x(1-x)} \to 0$ damit ist der Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ein Maximum. Der maximale Wert von $f(x,y) = e^{xy}$ und der Geraden $g(x,y) = x+y = 1$ ist dann $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$.

(b) Es gilt

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

und

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1).$$

Wir suchen Punkte so dass die Gradienten parallell sind, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$, so dass $\nabla f = \lambda \nabla g$. Wir bekommen dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} yz &= \lambda, \\ xz &= \lambda, \\ xy &= \lambda, \\ x+y+z &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei sieht man, dass $xz = yz \neq 0 \Rightarrow x = y$. Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt $z = y$. Also gilt $x = y = z$ und $3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Da $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ und z.B. $f(0,0,1) = 0$ folgt, dass der Punkt ein Maximum ist und der maximale Wert von $f(xyz) = xyz$ und der Ebene $x+y+z = 1$ ist $\frac{1}{9}$.

(G 15)

Bestimmen Sie die Maxima für die Quadrate folgender reeller Orbitale des Wasserstoffatoms:

$$\begin{aligned} \psi_{2p_x}(r,\theta,\varphi) &= Nr \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ \psi_{3d_{z^2}}(r,\theta,\varphi) &= Nr^2 \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right) \left(3\cos^2(\theta) - 1\right), \end{aligned}$$

wobei $a_0 > 0$ und $N > 0$ Konstanten sind und $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ ((r, θ, φ) sind einfach die Kugelkoordinaten aus H5(a)).

LÖSUNG:

Sei

$$f(r,\theta,\varphi) = \psi_{2p_x}(r,\theta,\varphi)^2 = N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi).$$

Dann berechnen wir zuerst die erste Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\} \\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) 2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\varphi) \\
&= N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin(2\theta)\cos^2(\varphi) \\
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin^2(\theta)\sin(2\varphi)
\end{aligned}$$

und dann die zweite Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\left\{r - \frac{2r}{a_0} - \frac{1}{a_0}\left[2r - \frac{r^2}{a_0}\right]\right\} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r} &= 2N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\varphi)\left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial r} &= -2N^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= 2N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\cos(2\theta)\cos^2(\varphi), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \theta} &= -2N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin(2\theta)\sin(2\varphi), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} &= -2N^2 r^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)\sin^2(\theta)\cos(2\varphi).
\end{aligned}$$

Jetzt können wir die kritischen Punkte finden. Es gilt $\nabla f(r,\theta,\varphi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
0 &= \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\left\{2r - \frac{r^2}{a_0}\right\} \\
0 &= r^2 \sin(2\theta)\cos^2(\varphi) \\
0 &= r^2 \sin^2(\theta)\sin(2\varphi)
\end{aligned}$$

Man sieht sofort folgende kritische Punkte

$$\begin{aligned}
r &= 0\,\text{und}\;\theta,\varphi\,\text{beliebig (Nullpunkt)}\\
\theta &= 0\,\text{oder}\;\pi\,\text{und}\,r,\varphi\,\text{beliebig (}z\text{-Achse)}\\
\varphi &= \frac{\pi}{2}\,\text{oder}\,-\frac{\pi}{2}\;\text{und}\;r,\theta\,\text{beliebig (}yz\text{-Ebene)}
\end{aligned}$$

Weil $f \geq 0$ und $f = 0$ ist in den obigen Fällen sind diese Punkte lokale Minima.

Die übrigen Fälle sind, wenn $\sin\theta \neq 0$ und $\cos\varphi \neq 0$. Dann ist $\sin(2\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \in \{0,\pi\}$ und $\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ (oder $\theta = 0$ aber das ist in den obigen Fällen einbegriffen). Aus der erste Gleichung folgt dann, dass $r = 2a_0$ (weil der Fall $r = 0$ ist auch schon behandelt).

Wir haben dann zwei kritische Punkte $\left(2a_0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ und $\left(2a_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ die auf der x-Achse liegen. Die Hessematrix ist

$$H\left(f, 2a_0, \frac{\pi}{2}, 0\right) = H\left(f, 2a_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -2N^2e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -8N^2a_0^2e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -8N^2a_0^2e^{-2} \end{pmatrix}$$

und die ist offensichtlich negativ definit. Damit ist der Punkte $\left(2a_0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ und $\left(2a_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ lokales Maximum.

(b) Sei

$$g(r,\theta,\varphi) = \psi_{3d_{z^2}}(r,\theta,\varphi)^2 = N^2r^4\exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)^2.$$

Wie in (a) sieht man direkt, dass $r = 0$ (θ, φ beliebig) und $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (r, φ beliebig) Minima entprichen. Um andere Extremalstellen zu finden berechnen wir zuerst die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= N^2\exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)^2\left\{4r^3 - \frac{2r^4}{3a_0}\right\},\\
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= N^2r^4\exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)2\left(3\cos^2\theta - 1\right)6\cos\theta\,(-\sin\theta)\\
&= -6N^2r^4\exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)\sin 2\theta,\\
\frac{\partial g}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned}$$

Und die zweiten Ableitungen sind:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= N^2 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)^2\left\{12r^2-\frac{8r^3}{3a_0}-\frac{2}{3a_0}\left(4r^3-\frac{2r^4}{3a_0}\right)\right\},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -6N^2 r^4 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)\left\{-3\sin(2\theta)\sin(2\theta)+2\left(3\cos^2\theta-1\right)\cos 2\theta\right\},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} &= -6N^2 \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)\sin 2\theta\left\{4r^3-\frac{2r^4}{3a_0}\right\}
\end{aligned}
$$

(alle Ableitungen mit φ sind Null). Um die kritische Stellen zu finden setzen wir $\nabla g = 0$ $\Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(3\cos^2\theta-1\right)^2\left\{4r^3-\frac{2r^4}{3a_0}\right\} = \left(3\cos^2\theta-1\right)^2 4r^3\left\{1-\frac{r}{6a_0}\right\},\\
0 &= r^4\left(3\cos^2\theta-1\right)\sin 2\theta.
\end{aligned}
$$

Und falls $r \neq 0$ und $\theta \neq \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ dann muss $\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$ und $r = 6a_0$. Die Hessematrix ist

$$
\begin{aligned}
H\left(g,6a_0,0,\varphi\right) &= \begin{pmatrix} -576a_0^2N^2e^{-4} & 0 & 0\\ 0 & -4\cdot 6^5N^2a_0^4e^{-4} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
H\left(g,6a_0,\frac{\pi}{2},\varphi\right) &= \begin{pmatrix} -144a_0^2N^2e^{-4} & 0 & 0\\ 0 & -2\cdot 6^5N^2a_0^4e^{-4} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und man sieht einfach, dass die beiden negativ semi-definit sind und die entsprechende Punkten sind damit Maxima für $\left|\psi_{d_{z^2}}\right|^2$. Die Menge $\{(r,\theta,\varphi) = (6a_0,0,\varphi) \mid -\pi < \varphi \leq \pi\}$ besteht einfach aus dem Punkt im $\mathbb{R}^3$ mit $x = y = 0$und $z = 6a_0$. Die Menge

$$
\left\{(r,\theta,\varphi) = \left(6a_0,\frac{\pi}{2},\varphi\right) \mid -\pi < \varphi \leq \pi\right\}
$$

ist ein Kreis auf der $xy-$Ebene mit Radius $6a_0$.

Hausübungen

(H 6) [5+5P]

(a) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$f(x,y,z) = xy\sqrt{z}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$$

im Gebiet $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$.

(b) Bestimmen Sie den maximalen Wert der Funktion

$$h(x,y,z) = x+y+z$$

unter der Nebenbedingung

$$k(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$

für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

LÖSUNG:

(a) Wir haben

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y\sqrt{z}, x\sqrt{z}, xy\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$$

und

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1).$$

Wir suchen Punkte, so dass die Gradienten parallell sind, d.h. es gibt ein $\lambda \neq 0$, so dass $\nabla f = \lambda \nabla g$. Wir bekommen dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} y\sqrt{z} &= \lambda, \\ x\sqrt{z} &= \lambda, \\ xy\frac{1}{2\sqrt{z}} &= \lambda, \\ x+y+z &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei sieht man, dass $x\sqrt{z} = y\sqrt{z} \neq 0 \Rightarrow x = y$. Wenn man die zweite und dritte vergleicht sieht man:

$$xy\frac{1}{2\sqrt{z}} = \lambda = x\sqrt{z} \Rightarrow z = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x.$$

Wenn wir diese jetzt in die Nebenbedeingung einsetzen bekommen wir

$$g\left(x,x,\frac{1}{2}x\right) = \frac{5}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{5}.$$

Da $f\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{125}$ und z.B. $f(0,0,1)=0$ folgt, dass der Punkt ein Maximum ist und der maximale Wert von $f(xyz)=xy\sqrt{z}$ auf der Ebene $x+y+z=1$ ist $\frac{4\sqrt{5}}{125}$.

(b) Wir haben

$$\nabla h(x,y,z)=(1,1,1)\,,\,\text{und}\,\nabla k(x,y,z)=(2x,2y,2z)\,.$$

Falls ein Maximum existiert gibt es ein $\lambda\neq 0$, so dass $\nabla k=\lambda\nabla h$ folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}2x &= \lambda,\\ 2y &= \lambda,\\ 2z &= \lambda\end{aligned}$$

und es folgt, dass $x=y=z$. Dies setzen wir in die Nebenbedingung ein:

$$k(x,x,x)=3x^2=1$$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Es folgt, dass der maximale Wert für $x+y+z$ auf der Einheitskugel $x^2+y^2+z^2=1$ $h\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ ist.