Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 14.5.2009

Höhere Mathematik II

5. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 23

Gruppenübungen

(G 11)

Sei

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \left(e^{u+v}, e^{u-v}\right), \\ g(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta), \\ h(r,\theta,z) &= (r\cos\theta, r\sin\theta, z). \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie für die Funktionen f, g und h die Jakobi-Matrizen und die Divergenz. Berechnen Sie für h auch die Rotation.

(b) Sei $F(u,v) = g \circ f(u,v)$. Schreiben Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ explizit aus. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $F'(u,v)$.

LÖSUNG:

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u} &= e^{u+v}, \frac{\partial f_1}{\partial v} = e^{u+v}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} &= e^{u-v}, \frac{\partial f_2}{\partial v} = -e^{u-v}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} J(f,(u,v)) &= e^u \begin{pmatrix} e^v & e^v \\ e^{-v} & -e^{-v} \end{pmatrix} \text{ und} \\ \mathrm{Div}(f) &= e^u\left(e^v - e^{-v}\right) = 2e^u \sinh(v) \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial r} &= \cos\theta,\ \frac{\partial g_1}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\\ \frac{\partial g_2}{\partial r} &= \sin\theta,\ \frac{\partial g_2}{\partial\theta}=r\cos\theta\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}J(g,(r,\theta)) &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\text{ und}\\ \operatorname{Div}(g) &= \cos\theta+r\cos\theta=(1+r)\cos\theta.\end{aligned}$$

(iii) Es gilt $h_1(r,\theta,z)=r\cos\theta,\ h_2(r,\theta,z)=r\sin\theta, h_3(r,\theta,z)=z$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial r} &= \cos\theta,\ \frac{\partial h_1}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\ \frac{\partial h_1}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial h_2}{\partial r} &= \sin\theta,\ \frac{\partial h_1}{\partial\theta}=r\cos\theta,\ \frac{\partial h_1}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial h_1}{\partial r} &= 0,\ \frac{\partial h_1}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial h_1}{\partial z}=1.\end{aligned}$$

Di Jacobi matrix ist dann

$$h'(r,\theta,z)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

die Divergenz ist

$$\operatorname{Div}(h)=\frac{\partial h_1}{\partial r}+\frac{\partial h_2}{\partial\theta}+\frac{\partial h_3}{\partial z}=1+(1+r)\cos\theta$$

und die Rotation ist

$$\operatorname{rot}(h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_3}{\partial\theta}-\frac{\partial h_2}{\partial z}\\ \frac{\partial h_1}{\partial z}-\frac{\partial h_3}{\partial r}\\ \frac{\partial h_2}{\partial r}-\frac{\partial h_1}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \sin\theta+r\sin\theta\end{pmatrix}=\sin\theta\begin{pmatrix}0\\0\\1+r\end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$F(u,v)=g\circ f(u,v)=\left(e^{u+v}\cos\left(e^{u-v}\right),e^{u+v}\sin\left(e^{u-v}\right)\right)$$

und nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
F' &= g'(f(u,v))\, f'(u,v) = J(g, f(u,v))\, J(f,(u,v)) \\
&= \begin{pmatrix} \cos e^{u-v} & -e^{u+v}\sin e^{u-v} \\ \sin e^{u-v} & e^{u+v}\cos e^{u-v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{u+v} & e^{u+v} \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{u+v}\cos(e^{u-v}) - e^{u-v}e^{u+v}\sin(e^{u-v}) & e^{u+v}\cos(e^{u-v}) + e^{u-v}e^{u+v}\sin(e^{u-v}) \\ e^{u+v}\sin(e^{u-v}) + e^{u-v}e^{u+v}\cos(e^{u-v}) & e^{u+v}\sin(e^{u-v}) - e^{u-v}e^{u+v}\cos(e^{u-v}) \end{pmatrix} \\
&= e^{u} \begin{pmatrix} e^{v}\cos(e^{u-v}) - e^{u}\sin(e^{u-v}) & e^{v}\cos(e^{u-v}) + e^{u}\sin(e^{u-v}) \\ e^{v}\sin(e^{u-v}) + e^{u}\cos(e^{u-v}) & e^{v}\sin(e^{u-v}) - e^{u}\cos(e^{u-v}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(G 12)

Schiefer Wurf: Der Ortsvektor eines Atoms ist gegeben durch $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{m}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{m/s}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.05 \end{pmatrix} \mathrm{m/s}^2.$$

Berechnen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor. Wo liegt der Startpunkt, wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangsbeschleunigung? An welchem Ort befindet sich das Teilchen nach 10 Sekunden? Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für jede Komponente x, y und z auf und berechnen Sie die Zeit, wenn das Atom durch die x,y-Ebene durchtritt bzw. an welchem Punkt die Flugbahn ihren größte Höhe über der x,y-Ebene besitzt.

LÖSUNG:

Es gilt

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ 5 + t - 0.05t^2 \end{pmatrix}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2\right) = \vec{b} + 2\vec{c}t = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 - 0.10t \end{pmatrix}$$

und der Beschleunigungsvektor ist

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = 2\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.10 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

und weil die Beschleunigung konstant ist, ist die Anfangsbeschleunigung

$$\vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.10 \end{pmatrix}.$$

Nach 10 sekunden befindet sich den Teilchen am

$$\vec{r}(10) = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \\ 5+t-0.05t^2 \end{pmatrix}$$

haben die Komponenten folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) = 4, & x(0) = 0, \\ y'(t) = -2, & y(0) = 0, \\ z''(t) = -0.1, & z(0) = 5, z'(0) = 1. \end{cases}$$

Die bedingung $z(t) = 0$ ist erfüllt falls

$$5+t-0.05t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 20t - 100 = 0 \Leftrightarrow t = 10 \pm \sqrt{100+100} = 10 \pm 10\sqrt{2}.$$

Es folgt dass das Atom die x,y-Ebene durchtritt am zeitpunkt

$$t_0 = 10\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 24.14\text{s}.$$

Für die größte Höhe zu finden müßen wir das maximale Wert für die Funktion $z(t)$ finden. Es gilt

$$z'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0.1t = 0 \Leftrightarrow t = 10.$$

Also ist die maximale Höhe am Zeit $t = 10$ angenommen und die maximale Höhe ist dann

$$z_{max} = z(10) = 5 + 10 - 5 = 10\text{m}.$$

und die entsprechende Punkt in die x,y-Ebene ist

$$(x(10), y(10)) = (40, -20).$$

Hausübungen

(H 5) [5+5P]

(a) Sei
$$f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi).$$
Berechnen Sie die Jakobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f .

(b) Seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ und $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die durch
$$f(t) = \left(\cos t, \sin t, e^t\right)^T, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, \quad h(t) = g\circ f(t)$$
definierten Funktionen. Berechnen Sie $h'(t)$. Wie kann man sich f geometrisch vorstellen?

LÖSUNG:

(a) Sei $f_1(r,\theta,\varphi) = x$, $f_2(r,\theta,\varphi) = y$ und $f_3(r,\theta,\varphi) = z$. Dann gilt
$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \sin\varphi\cos\theta, \quad \tfrac{\partial f_1}{\partial\theta} = -r\sin\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial f_1}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \sin\varphi\sin\theta, \quad \tfrac{\partial f_2}{\partial\theta} = r\sin\varphi\cos\theta, \quad \frac{\partial f_2}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \tfrac{\partial f_3}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi$$
und
$$J(f,(r,\theta,\varphi)) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$
Es folgt, dass die Divergenz von f
$$\operatorname{div}(f) = \sin\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\cos\theta - r\sin\varphi$$
ist und die Rotation ist:
$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial\theta} - \frac{\partial f_2}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial f_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial f_3}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta - \cos\varphi \\ \sin\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi(r\cos\theta - 1) \\ \sin\varphi\sin\theta(1+r) \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $h = g\circ f(t) = \cos^2 t + \sin^2 t + e^{2t} = 1 + e^{2t}$. Dann gilt $h'(t) = 2e^{2t}$.
$$f(t) = \left(\cos t, \sin t, e^t\right)^T, g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2.$$
Die Funktion f beschreibt ein Spirale um die z-Achse.