



## Höhere Mathematik II

### 5. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 23

#### Gruppenübungen

##### (G 11)

Sei

$$\begin{aligned}f(u, v) &= (e^{u+v}, e^{u-v}), \\g(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta), \\h(r, \theta, z) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, z).\end{aligned}$$

- (a) Berechnen Sie für die Funktionen  $f, g$  und  $h$  die Jakobi-Matrizen und die Divergenz. Berechnen Sie für  $h$  auch die Rotation.
- (b) Sei  $F(u, v) = g \circ f(u, v)$ . Schreiben Sie das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  explizit aus. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $F'(u, v)$ .

##### (G 12)

Schiefer Wurf: Der Ortsvektor eines Atoms ist gegeben durch  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2$  mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ m}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m/s}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.05 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2.$$

Berechnen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor. Wo liegt der Startpunkt, wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangsbeschleunigung? An welchem Ort befindet sich das Teilchen nach 10 Sekunden? Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für jede Komponente  $x, y$  und  $z$  auf und berechnen Sie die Zeit, wenn das Atom durch die  $x, y$ -Ebene durchtritt bzw. an welchem Punkt die Flugbahn ihren größte Höhe über der  $x, y$ -Ebene besitzt.

## Hausübungen

**(H 5) [5+5P]**

(a) Sei

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$

Berechnen Sie die Jakobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von  $f$ .

(b) Seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$f(t) = (\cos t, \sin t, e^t)^T, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad h(t) = g \circ f(t)$$

definierten Funktionen. Berechnen Sie  $h'(t)$ . Wie kann man sich  $f$  geometrisch vorstellen?