Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 9.5.2009

Höhere Mathematik II

4. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 21

Gruppenübungen

(G 8)

Bestimmen Sie ob folgende Funktionen ein lokales Extremum in $(0,0)$ haben:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= 4x^2+12xy+9y^2+x^4, \\ f(x,y) &= (1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y)-2x-y, \end{aligned}$$

LÖSUNG:

(a) Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 8x+12y+4x^3, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 12x+18y, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 8+12x^2, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 18, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= 12. \end{aligned}$$

Damit gilt $\nabla g(0,0) = (0,0)$ und

$$H(f,0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Hessematrix ist

$$\det H = 18 \cdot 8 - 12^2 = 0.$$

Somit ist die Matrix positiv-semidefinit im Punkt $(0,0)$. Zur Bestimmung, ob der Punkt ein Extremum ist reicht dieses Kriterium also nicht aus. Es gilt aber, dass $4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^4 = (2x+3y)^2 + x^4$ ist. Somit gilt $g(x,y) \geq 0$ für alle (x,y). Der Punkt $(0,0)$ ist also ein globales Minimum.

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x+y)\ln(1+2x+y) + (1+\sin(x+y))\frac{2}{1+2x+y} - 2 \,\text{und} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x+y)\ln(1+2x+y) + (1+\sin(x+y))\frac{1}{1+2x+y} - 1.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0)\ln(1) + (1+\sin(0))\frac{2}{1+0} - 2 = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos(0)\ln(1+0) + (1+0)\frac{1}{1+2x+y} - 1 = 0$. Damit ist es möglich, dass die Funktion ein Extremum im $(0,0)$ hat. Wir müssen jetzt die Hessematrix untersuchen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sin(x+y)\ln(1+2x+y) + \cos(x+y)\frac{2}{1+2x+y} \\
&\quad +2\frac{\cos(x+y)(1+2x+y) - (1+\sin(x+y))2}{(1+2x+y)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 0 + 1 \cdot \frac{2}{1} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 - 2}{1^2} = 2 - 2 = 0, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\sin(x+y)\ln(1+2x+y) + \cos(x+y)\frac{1}{1+2x+y} \\
&\quad +\frac{\cos(x+y)(1+2x+y) - (1+\sin(x+y))}{(1+2x+y)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 0 + 1 + \frac{1-1}{1} = 1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\sin(x+y)\ln(1+2x+y) + \cos(x+y)\frac{2}{1+2x+y} \\
&\quad +\frac{\cos(x+y)(1+2x+y) - 2(1+\sin(x+y))}{(1+2x+y)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 0 + 2 + \frac{1-2}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$H(f,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist weder positiv noch negativ definit. Zum Beispiel gilt $\langle \mathbf{x}, H\mathbf{x}\rangle = 2xy + y^2 = 0$ für alle Punkte der Form $(x,0)$. Es folgt das f keinen lokalen Extrempunkt im Nullpunkt haben kann.

(G 9)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass A_1 positiv definit ist und dass A_2 und A_3 indefinit sind.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle kritische Stellen und ihre Art für

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3, \\ h(x,y,z) &= 1 + x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy + 6yz - 2xz. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

(a) Nach Definition heißt A pos. bzw. neg. definit falls $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle > 0$ bzw. < 0 $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ und pos. bzw. neg. semidefinit falls $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle \geq 0$ bzw. ≤ 0. um das zu zeigen benutzen wir die Quadratkomplettierung.

(1) Für A_1 haben wir:

$$\begin{aligned} Q_1(x,y) &= \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^t A_1 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix} = x(x+y) + y(x+2y) = x^2 + 2y^2 + 2xy \\ &= (x+y)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Es ist dann klar das $Q_1(x,y) > 0$ falls $(x,y) \neq (0,0)$ und $Q_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

(2) Für A_2 haben wir:

$$\begin{aligned}
Q_2(x,y) &= \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^t A_2 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x+1y \end{pmatrix} = x(2x+3y) + y(3x+1y) = 2x^2 + y^2 + 6xy \\
&= 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - 2\left(\frac{9}{4}\right) y^2 + y^2 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{7}{2} y^2
\end{aligned}$$

und somit ist es klar, dass A_2 ist indefinit, z.B. gilt $Q_2(x,0) \geq 0$ und $Q_2\left(-\frac{3}{2},1\right) = 0 - \frac{7}{2} < 0$.

(3) Für A_3 haben wir

$$\begin{aligned}
Q_3(x,y,z) &= \langle \mathbf{x}, A_3\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^t A_3 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 4xz + 8z^2 + 12yz \\
&= 2(x-(y+z))^2 - 2(y+z)^2 + 4y^2 + 8z^2 + 12yz \\
&= 2(x-(y+z))^2 + 2y^2 + 6z^2 + 8yz \\
&= 2(x-(y+z))^2 + 2(y+2z)^2 - 8z^2 + 6z^2 \\
&= 2(x-(y+z))^2 + 2(y+2z)^2 - 2z^2.
\end{aligned}$$

Damit sieht man einfach, dass für z $Q_3(x,y,0) \geq 0$ ist aber fuer z.B. $z=1$, $y=-2$ und $x=-1$ haben wir $Q_3(-1,-2,1) = 0+0-2 < 0$. Es folgt, dass A_3indefinit ist.

(b) (1) Wir müssen alle Nullstellen vom Gradienten von f finden. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(6x+3y, 3x+2y+3y^2\right)$$

und $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 6x+3y=0$ und $3x+2y+3y^2=0$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = -\frac{1}{2}y$ und das setzen wir in die zweite Gleichung ein: $-\frac{3}{2}y + 2y + 3y^2 = \frac{1}{2}y + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $3y + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ oder $(x,y) = \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$. Die kritische Stellen sind damit

$$\mathbf{x}_0 = (0,0) \text{ und } \mathbf{x_1} = \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right).$$

Jetzt müssen wir diese zwei Punkten untersuchen. Die Hessematrix ist

$$H(f,x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2+6y \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die beide Punkten einsetzen bekommen wir:

$$\begin{aligned} H_1 &= H(f,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ H_2 &= H\left(f,\frac{1}{12},-\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt: $\det H_1 = 12-9 = 3$ und $\det H_2 = 6-9 = -3$. Aus dem Hurwitzkriterium folgt, dass H_1 positiv definit ist und das H_2 indefinit ist. Damit ist der Punkt $(0,0)$ ein isolierte lokales Minimum und $\left(\frac{1}{12},-\frac{1}{6}\right)$ ein Sattlepunkt (aber keine Extremstelle).

(2) Wir haben $h(x,y,z) = 1+x^2+2y^2+4z^2-2xy+6yz-2xz$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= 2x-2y-2z, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 4y-2x+6z \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= 8z+6y-2x. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\nabla h = \mathbf{0}$ ist dann einfach das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x-y-z & = 0, \\ -x+2y+3z & = 0, \\ -x+3y+4z & = 0. \end{cases}$$

Dieses System ist einfach zu lösen. Schreiben Sie die zugehörige Matrix als $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} A &\sim \{r_2 \to R_2+r_1, r_3 \to r_3+r_1\} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \{r_1 \to r_1+r_2, r_3 \to r_3-2r_2\} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \{r_2 \to r_2+2r_3, r_1 \to r_1+r_3\} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die Gleichung $\nabla h = \mathbf{0}$ die eindeutige Lösung $(x,y,z) = (0,0,0)$ hat. Das heißt

$$\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$$

ist eine kritische Stelle von h. Für die Untersuchung auf Extrema brauchen wir die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= 2x - 2y - 2z, \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= 4y - 2x + 6z \\
\frac{\partial h}{\partial z} &= 8z + 6y - 2x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 2, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= 4, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= 8, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} &= -2, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x} &= -2, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y} &= 6.
\end{aligned}$$

Damit ist die Hesse Matrix im Nullpunkt

$$H(f, \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aus (a)(3) folgt, dass die Hessematrix indefinit ist. Es folgt, dass der Nullpunkt keine Extremstelle ist.

(G 10)

Zwischen Luftdruck p und Höhe h (über Meeresniveau) besteht unter Annahme konstanter Lufttemperatur der Zusammenhang (barometrische Höhenformel):

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/h_S}$$

(der Skalenhöhe $h_S \approx 8000m$.) Leiten Sie einen möglichst guten, angenährten linearen Zusammenhang zwischen den Größen p und h her. Bis zu welcher Höhe lieftert diese Näherung Werte, die um maximal 1% vom tatsächlichen Luftdruck abweichen?

LÖSUNG:

Aus der Taylorschen Formel mit Rest wissen wir, dass für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$e^{-x} \approx 1 - x + R_2(x)$$

wobei

$$R_2(x) = -\frac{1}{2} e^{-\xi} x^2$$

für ein $\xi \in [0, x]$. Es folgt, dass $|R_2(x)| \leq \frac{x^2}{2}$. Sei $x = \frac{h}{h_S}$. Dann gilt, falls $h < h_S$ dass

$$p(h) = p_0 (1 - x + R_2(x))$$

oder

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{h}{h_S}\right) + p_0 R_2 \left(\frac{h}{h_S}\right).$$

Der lineare Zusammenhang ist

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{h}{h_S}\right)$$

und die Abweichung

$$\left| p_0 R_2 \left(\frac{h}{h_S}\right) \right| = p_0 \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_S^2}$$

ist kleiner als 1% falls $p_0 \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_S^2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow h^2 < p_0^{-1} h_S^2 \frac{1}{50} \Leftrightarrow$

$$h < h_S \sqrt{\frac{1}{50 p_0}}.$$

Hausübungen

(H 4) [5+5P]

(a) Sei

$$f(x, y, z) = (x + xy + yz) e^x.$$

Bestimmen Sie alle kritische Stellen von f und ihre Art.

(b) Sei

$$h(x,y,z) = e^{xyz}\left(1 - \arctan\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)\right).$$

Hat h eine lokale Extremstelle im Nullpunkt? Bestimmen Sie in diesem Fall welche Art von Extremstelle.

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x (x + xy + yz + 1 + y), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^x (x + z), \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= e^x y.
\end{aligned}$$

Für eine kritische Stelle muss $\nabla f = 0$. In diesem fall muss $y = 0$, $x + z = 0$ und $x + 1 = 0$. Es folgt, dass der Punkt

$$\mathbf{x}_0 = (-1, 0, 1)$$

eine kritische Stelle von f ist. Wir müssen jetzt diesen Punkt untersuchen. Die zweiten Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^x (x + xy + yz + 2 + 2y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^x (x + z + 1), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= e^x y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= e^x.
\end{aligned}$$

Die Hessematrix in $(-1, 0, 1)$ ist:

$$H(f, -1, 0, 1) = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Hurwitzkriterium folgt, dass H indefinit ist und $\mathbf{x}_0$ ist keine Extremstelle von f.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= e^{xyz}\left\{yz\left(1-\arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)-\frac{2x}{1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2}\right\},\\
\frac{\partial h}{\partial y} &= e^{xyz}\left\{xz\left(1-\arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)-\frac{2y}{1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2}\right\} \text{ und}\\
\frac{\partial h}{\partial z} &= e^{xyz}\left\{xy\left(1-\arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)-\frac{4z}{1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass $\nabla h(0,0,0)=(0,0,0)$. Man sieht auch, dass wir nicht alles ausrechnen müssen für die zweite Ableitunge, weil viele Therme verschwinden. Z.b. alle ableitungen von e^{xyz} sind im Nullpunkt Null:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= e^{xyz}\frac{\partial}{\partial x}\left\{yz\left(1-\arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)-\frac{2x}{1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2}\right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}}\\
&= \left\{0-\frac{2\left(1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\right)-2x4x\left(x^2+y^2+2z^2\right)}{\left[1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\right]^2}\right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} = -\frac{2}{1}=-2,\\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= e^{xyz}\frac{\partial}{\partial y}\left\{xz\left(1-\arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)-\frac{2y}{1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2}\right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}}\\
&= 0-\frac{2\left(1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\right)}{\left[1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\right]^2}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = -2,\\
\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= e^{xyz}\frac{\partial}{\partial z}\left\{xy\left(1-\arctan\left(x^2+y^2+2z^2\right)\right)-\frac{4z}{1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2}\right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}}\\
&= 0-\frac{4\left(1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\right)}{\left[1+\left(x^2+y^2+2z^2\right)^2\right]^2}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = -4.
\end{aligned}$$

Und die gemischten Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= e^{xyz} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ zy \left(1 - \arctan\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)\right) - \frac{2x}{1 + \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)^2} \right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} \\
&= 0 - 0 = 0, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= e^{xyz} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ zy \left(1 - \arctan\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)\right) - \frac{2x}{1 + \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)^2} \right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= e^{xyz} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ xz \left(1 - \arctan\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)\right) - \frac{2y}{1 + \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)^2} \right\}_{|\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 0,
\end{aligned}
$$

Damit ist die Hessematrix

$$
H\left(f, \mathbf{0}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}
$$

offensichtlich negativ definit. Es folgt das h eine lokales Maximum im Nullpunkt hat.