Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 30.4.2009

Höhere Mathematik II

3. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 20

Gruppenübungen

(G 5)

Sei

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{xy}+x^2+2xy^3+3y, \quad \mathbf{x}_0=(x_1,y_1)=(2,0), \mathbf{v}=(-1,1), \\ g(x,y) &= \sqrt{1+x+y}, \quad \mathbf{x}_0=(1,0), \mathbf{v}=(-1,1), \\ h(x,y) &= \sin\left(x^2+y^2\right), \mathbf{x}_0=(0,0), \mathbf{v}=(1,1), \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0), D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{x}_0), D_{\mathbf{v}}h(\mathbf{x}_0)$ von f,g,h in dem Punkt $\mathbf{x}_0$ und im Richtung $\mathbf{v}$.

(b) Geben Sie die Taylor-entwickelungen bis zum Grad 2 für die Funktionen f,g,h in dem entsprechende Punkt $\mathbf{x}_0$ an.

LÖSUNG:

Wir berechnen zuerst alle Gradienten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy}+2x+2y^3, \\ f_x(x,y) &= xe^{xy}+6xy^2+3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{1}{2}}, \\ g_y(x,y) &= \frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_x(x,y) &= 2x\cos\left(x^2+y^2\right), \\
h_y(x,y) &= 2y\cos\left(x^2+y^2\right).
\end{aligned}
$$

(a) Wir können jetzt die richtungsableitungen in die angegebene Punkten und Richtungen berechnen. Wir müßen aber erst die Richtungsvektoren normieren: $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$
\begin{aligned}
\nabla f(2,0) &= (4,5) \\
D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(2,0)\cdot\tilde{\mathbf{v}} &= (4,5)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla g(1,0) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\
D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{x}_0) = \nabla g(1,0)\cdot\tilde{\mathbf{v}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla h(0,0) &= (0,0), \\
D_{\mathbf{v}} h(\mathbf{x}_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

(b) Wir müß die zweite Ableitungen berechnen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= ye^{xy}+2x+2y^3, \\
f_y(x,y) &= xe^{xy}+6xy^2+3, \\
f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy}+2, \\
f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy}+12xy, \\
f_{xy}(x,y) &= (1+xy)e^{xy}+6y^2 = f''_{yx}(x,y),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_x(x,y) &= g_y(x,y) = \frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{1}{2}}, \\
g_{xx}(x,y) &= g_{xx}(x,y) = g_{xy}(x,y) = -\frac{1}{4}(1+x+y)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
h_x(x,y) &= 2x\cos\left(x^2+y^2\right), \\
h_y(x,y) &= 2y\cos\left(x^2+y^2\right), \\
h_{xx}(x,y) &= 2\cos\left(x^2+y^2\right)-4x^2\sin\left(x^2+y^2\right) \\
h_{yy}(x,y) &= 2\cos\left(x^2+y^2\right)-4y^2\sin\left(x^2+y^2\right) \\
h_{xy}(x,y) &= -4xy\sin\left(x^2+y^2\right).
\end{aligned}
$$

Wir berechnen jetzt die Taylorentwicklungen und dafür brauchen wir folgenden Werten:

$$
\begin{aligned}
f(2,0) &= 1+4=5, \\
f_x(2,0) &= 4, \\
f_y(2,0) &= 2+3=5, \\
f_{xx}(2,0) &= 2, \\
f_{yy}(2,0) &= 4, \\
f_{xy}(2,0) &= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_x(1,0) &= g_y(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\
g_{xx}(1,0) = g_{yy}(1,0) = g_{xy}(1,0) &= -\frac{1}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_x(0,0) &= h_y(0,0) = 0, \\
h_{xx}(0,0) &= h_{yy}(0,0) = 2, \\
h_{xy}(0,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Die Taylor entwicklungen sind dann:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + o\Big(\\
&= 5+4(x-2)+5(y-0)+\frac{1}{2}\Big[2(x-2)^2+2(x-2)y+4(y-0)^2\Big] + o\Big((x-2)^2+(y)^2 \\
&= T_2(f;\mathbf{x}_0)(x,y) + R, \\
T_2(f;\mathbf{x}_0)(x,y) &= 5-8+4x+5y+\frac{1}{2}\left[2x^2-8x+8+2xy-4y+4y^2\right] \\
&= 1+3y+x^2+xy+2y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(g_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2g_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + g_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + o\Big((x-x_0) \\
&= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(x-1)+y\right] - \frac{\sqrt{2}}{32}\Big[(x-1)^2+2(x-1)y+y^2\Big] + o\Big((x-1)^2+y^2\Big) \\
&= T_2(g;\mathbf{x}_0)(x,y) + R
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
T_2\left(g;\mathbf{x}_0\right)(x,y) &= \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{32}+\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{32}\right\}(x+y)-\frac{\sqrt{2}}{32}\left[x^2+2xy+y^2\right] \\
&= \frac{23\sqrt{2}}{32}+\frac{10\sqrt{2}}{32}(x+y)-\frac{\sqrt{2}}{32}\left[x^2+2xy+y^2\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= h(x_0,y_0)+h_x(x_0,y_0)(x-x_0)+h_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&\quad +\frac{1}{2}\Big(h_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2h_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+h_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big)+o\Big((x-x_0) \\
&= \frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2\right)+o\left(x^2+y^2\right) \\
&= T_2\left(h;\mathbf{x}_0\right)(x,y)+R
\end{aligned}
$$

mit

$$
T_2\left(h;\mathbf{x}_0\right)(x,y)=x^2+y^2.
$$

$$
\begin{aligned}
h(0,0) &= \sin(0)=0 \\
h_x(0,0) &= h_y(0,0)=0, \\
h_{xx}(0,0) &= h_{yy}(0,0)=2, \\
h_{xy}(0,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

(G 6)

Sei

$$
f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}
$$

Zeigen Sie dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist aber im Nullpunkt gilt:

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).
$$

Sind $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ bzw. $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ im Nullpunkt stetig?

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $(x,y)\neq(0,0)$ und $(x,y)=(0,0)$ getrennt.

LÖSUNG:

Wir berechnen erst die erste partielle Ableitungen im Nullpunkt aus der Definition.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = y\frac{\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= y+2y^3\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2y^2x^3+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = x\frac{-\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^4-x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= -x+2x^3\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Dann können wir auch aus der Definition die zweite partielle Ableitungen berechnen

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+2h^3\frac{0-h^2}{h^4}-0}{h} = 1, \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h+2h^3\frac{h^2-0}{h^4}-0}{h} = -1. \end{aligned}$$

Es folgt das $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Aus der Satz von Schwarz wissen wir aber, das falls f_{xy} und f_{yx} stätige wäre, dann gilt auch $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Deswegen kann f_{xy} und f_{yx} in Nullpunkt nicht stetig sein.

(G 7)

(a) Lösen Sie eine Substanz in Wasser, so liegt der Gefrierpunkt der Lösung unter dem des reinen Wassers. Es gilt dabei die folgende Gleichung:

$$\ln(x_{Wasser}) = K \cdot T^* \left(1 - \frac{T^*}{T^* - \Delta T}\right).$$

x_{Wasser} ist der Molenbruch des Wassers in der Lösung, K ist die kryoskopische Konstante des Wassers, T^* ist der Gefrierpunkt des reinen Wassers und ΔT ist die Gefrierpunktserniedrigung der Lösung gegenüber dem reinen Wasser. Vereinfachen Sie die Gleichung so, dass Sie einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Molebruch des gelösten Stoffes und der Gefrierpunktserniedrigung erhalten für sehr kleine Konzentrationen des gelösten Stoffs. Nutzen Sie dazu die Taylor-Entwicklung zur Linearisierung entsprechender Terme.

(b) Entwickeln Sie die van-der Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = RT$$

in einer Taylor-Reihe für den Fall, dass das Molvolumen V_m sehr viel größer ist als das Kovolumen b des Gases. Identifizieren Sie den Term, der für die Abweichung vom idealen Gasverhalten ($pV_m = RT$) verantwortlich ist. Wann verschwindet dieser Term? Geben Sie die Temperatur als Funktion der van-der-Waals-Parameter an, bei der dies geschieht (sogenannte Boyle-Temperatur).

LÖSUNG:

(a) Sei x_S der Molenbruch des gelösten Stoffes. Dann gilt $x_{Wasser} + x_S = 1$ und es folgt das für sehr kleine x_S gilt

$$\ln(x_{Wasser}) = \ln(1 - x_S) \approx -x_S.$$

Falls x_S ist sehr klein dann ist auch $\Delta T / T^*$sehr klein und

$$K \cdot T^* \left(1 - \frac{T^*}{T^* - \Delta T}\right) = KT^* - \frac{KT^*}{1 - \frac{\Delta T}{T^*}} \approx KT^* - KT^* \left(1 + \frac{\Delta T}{T^*}\right) = -K\Delta T.$$

Es gilt damit das

$$x_S \approx K\Delta T.$$

(b) Falls $V_m \gg b$ können wir die Gleichung als

$$RT = \left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = pV_m + \frac{a}{V_m} - pb - \frac{ab}{V_m^2} \approx pV_m + \frac{a}{V_m} - pb$$

schreiben. Man sieht sofort das die Abweichung vom idealen Gasverhalten $pV_m = RT$ ist durch $\frac{a}{V_m} - pb$ gegeben. Diese term verschwindet falls $a = pbV_m$. Für $a = pbV_m$ haben wir

$$T = \frac{pV_m + \frac{a}{V_m} - pb}{R} = \frac{pV_m}{R} = \frac{a}{bR}.$$

Hausübungen

(H 3) [2+4+4P]

(a) Sei
$$f(x,y) = x^2y^3.$$
Berechnen Sie die richtungsableitung von f im Punkt $(1,1)$ und in richtung $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

(b) Sei
$$g(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}.$$
Geben Sie die Taylorpolynome zweites Grad für g in dem Punkt $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$ an.

(c) Sei
$$h(x,y) = (x+1)^{y+1}.$$
Geben Sie die Taylorpolynome zweites Grad für g in dem Nullpunkt an.

LÖSUNG:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$. Die normierte richtungsvektor ist $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(1,\sqrt{3}\right)$Damit ist

$$f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\mathbf{v} = (2,3)\cdot\frac{1}{2}\left(1,\sqrt{3}\right) = 1+\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{2xz^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{2yz^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\\
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{2z}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

und die zweite partielle Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -2z^2\frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - x4x\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4} = -2z^2\frac{y^2-3x^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= -2z^2\frac{x^2-3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} &= \frac{2}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{8xyz^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{-4xz}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} = \frac{-4yz}{\left(x^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Die Taylor-Polynome zweiten Grad ist dann mit $\mathbf{x} = (x,y,z)$ und $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$

$$T_2\left(g;(1,1,1)\right)(x,y) \quad = \quad g(1,1,1) + \nabla g(1,1,1) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) H(g;\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

wobei der Gradienten ist

$$\nabla g(1,1,1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

und die Hesse matrix ist

$$H(g;\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} g_{xx}(\mathbf{x_0}) & g_{xy}(\mathbf{x_0}) & g_{xz}(\mathbf{x_0}) \\ g_{yx}(\mathbf{x_0}) & g_{yy}(\mathbf{x_0}) & g_{xz}(\mathbf{x_0}) \\ g_{zx}(\mathbf{x_0}) & g_{zy}(\mathbf{x_0}) & g_{zz}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt das

$$\begin{aligned}
\nabla g(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) &= -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + (z-1) \\
&= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) H(g;\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) &= (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \cdot \Big(\frac{1}{2}(x-1) + (y-1) - (z-1), (x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - (z-1), -(x \\
&= (x-1, y-1, z-1) \cdot \left(\frac{1}{2}x + y - z - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2}, -x - y + z + 1\right) \\
&= (x-1)\left(\frac{1}{2}x + y - z - \frac{1}{2}\right) + (y-1)\left(x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2}\right) + (z-1)(-x-y+z \\
&= \frac{1}{2}x^2 + xy - xz - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x - y + z + \frac{1}{2} + xy + \frac{1}{2}y^2 - yz - \frac{1}{2}y - x - \frac{1}{2}y + z + \\
&\quad -zx - zy + z^2 + z + x + y - z - 1 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - x - y + 2z.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
T_2(g;\mathbf{x}_0)(x,y) &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+z+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-x-y+2z\right)\\
&= \frac{1}{2}-x-y+2z+\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+2z^2\right)+xy-xz-yz.
\end{aligned}
$$

(c) Weil x,y in eine Umgebung von Nullpunkt ist können wir annehmen, dass $x+1>0$ und damit ist $\ln(x+1)$ reell-wert. Dann gilt $h(x,y)=(x+1)^{y+1}=\exp((y+1)\ln(x+1))$ und für Ableitungen mit absicht von y benutzen wir die letzte Ausdrück. Die erste partielle Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= (y+1)(x+1)^y=(y+1)\exp(y\ln(x+1)),\\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \exp((y+1)\ln(x+1))\frac{\partial}{\partial y}\{(y+1)\ln(x+1)\}=\ln(x+1)\exp((y+1)\ln(x+1))\\
&= \ln(x+1)(x+1)^{y+1}.
\end{aligned}
$$

Die zweite partielle Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(y+1)(x+1)^y=(y+1)y(x+1)^{y-1}=y(y+1)\exp((y-1)\ln(x+1)),\\
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \ln(x+1)\frac{\partial}{\partial y}\exp((y+1)\ln(x+1))=\ln(1+x)^2\exp((y+1)\ln(x+1))\\
&= \ln(x+1)^2(x+1)^{y+1},\\
\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(y+1)\exp(y\ln(x+1))=\exp(y\ln(x+1))+(1+y)\ln(1+x)\exp(y\ln(x+1))\\
&= \exp(y\ln(x+1))\{1+(y+1)\ln(1+x)\}\\
&= (1+x)^y\{1+(y+1)\ln(1+x)\},\\
\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\ln(x+1)(x+1)^{y+1}=\frac{1}{x+1}(x+1)^{y+1}+\ln(x+1)(y+1)(x+1)^y\\
&= (1+x)^y\{1+(y+1)\ln(x+1)\}.
\end{aligned}
$$

Die Taylor-polynome zweiten Grad ist

$$
\begin{aligned}
T_2(h;(0,0))(x,y) &= h(0,0)+h'_x(0,0)x+h'_y(0,0)y\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{h''_{xx}(0,0)x^2+2h''_{xy}(0,0)xy+h''_{yy}(0,0)y^2\right\}\\
&= 1+x+0+\frac{1}{2}\left\{0x^2+2xy+0y^2\right\}\\
&= 1+x+xy.
\end{aligned}
$$