Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 7.5.2009

Höhere Mathematik II

3. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 20

Gruppenübungen

(G 5)

Sei

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{xy}+x^2+2xy^3+3y, \quad \mathbf{x}_0=(x_1,y_1)=(2,0)\,, \mathbf{v}=(-1,1)\,,\\
g(x,y) &= \sqrt{1+x+y}, \quad \mathbf{x}_0=(1,0)\,, \mathbf{v}=(-1,1)\,,\\
h(x,y) &= \sin\left(x^2+y^2\right), \mathbf{x}_0=(0,0)\,, \mathbf{v}=(1,1)\,,
\end{aligned}
$$

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)\,, D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{x}_0)\,, D_{\mathbf{v}}h(\mathbf{x}_0)$ von f,g,h in dem Punkt $\mathbf{x}_0$ in Richtung $\mathbf{v}$.

(b) Geben Sie die Taylorentwickelungen 2ten Grades für die Funktionen f,g,h in dem entsprechenden Punkt $\mathbf{x}_0$ an.

LÖSUNG:

Wir berechnen zuerst alle Gradienten

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= ye^{xy}+2x+2y^3,\\
f_x(x,y) &= xe^{xy}+6xy^2+3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_x(x,y) &= \frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{1}{2}},\\
g_y(x,y) &= \frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= 2x\cos\left(x^2+y^2\right), \\ h_y(x,y) &= 2y\cos\left(x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

(a) Wir können jetzt die Richtungsableitungen in den angegebenen Punkten und Richtungen berechnen. Wir müssen aber zuerst die Richtungsvektoren normieren: $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$\begin{aligned} \nabla f(2,0) &= (4,5) \\ D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(2,0)\cdot\tilde{\mathbf{v}} &= (4,5)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla g(1,0) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right), \\ D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{x}_0) = \nabla g(1,0)\cdot\tilde{\mathbf{v}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla h(0,0) &= (0,0), \\ D_{\mathbf{v}} h(\mathbf{x}_0) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Wir müssen die zweite Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy}+2x+2y^3, \\ f_y(x,y) &= xe^{xy}+6xy^2+3, \\ f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy}+2, \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy}+12xy, \\ f_{xy}(x,y) &= (1+xy)\,e^{xy}+6y^2 = f''_{yx}(x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= g_y(x,y) = \frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{1}{2}}, \\ g_{xx}(x,y) &= g_{xx}(x,y) = g_{xy}(x,y) = -\frac{1}{4}(1+x+y)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= 2x\cos\left(x^2+y^2\right), \\ h_y(x,y) &= 2y\cos\left(x^2+y^2\right), \\ h_{xx}(x,y) &= 2\cos\left(x^2+y^2\right)-4x^2\sin\left(x^2+y^2\right) \\ h_{yy}(x,y) &= 2\cos\left(x^2+y^2\right)-4y^2\sin\left(x^2+y^2\right) \\ h_{xy}(x,y) &= -4xy\sin\left(x^2+y^2\right). \end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt die Taylorentwicklungen und dafür brauchen wir folgende Werte:

$$\begin{aligned}
f(2,0) &= 1+4=5,\\
f_x(2,0) &= 4,\\
f_y(2,0) &= 2+3=5,\\
f_{xx}(2,0) &= 2,\\
f_{yy}(2,0) &= 4,\\
f_{xy}(2,0) &= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_x(1,0) &= g_y(1,0)=\frac{1}{2\sqrt{2}},\\
g_{xx}(1,0)=g_{yy}(1,0)=g_{xy}(1,0) &= -\frac{1}{8\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_x(0,0) &= h_y(0,0)=0,\\
h_{xx}(0,0) &= h_{yy}(0,0)=2,\\
h_{xy}(0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklungen sind dann:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)\\
&\quad +o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\\
&= 5+4(x-2)+5(y-0)+\frac{1}{2}\left[2(x-2)^2+2(x-2)y+4(y-0)^2\right]\\
&\quad +o\left((x-2)^2+(y)^2\right)\\
&= T_2(f;\mathbf{x}_0)(x,y)+R,\\
T_2(f;\mathbf{x}_0)(x,y) &= 5-8+4x+5y+\frac{1}{2}\left[2x^2-8x+8+2xy-4y+4y^2\right]\\
&= 1+3y+x^2+xy+2y^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= g(x_0,y_0)+g_x(x_0,y_0)(x-x_0)+g_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(g_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2g_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+g_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)\\
&\quad +o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\\
&= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}[(x-1)+y]-\frac{\sqrt{2}}{32}\left[(x-1)^2+2(x-1)y+y^2\right]+o\left((x-1)^2+y^2\right)\\
&= T_2(g;\mathbf{x}_0)(x,y)+R
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
T_2(g;\mathbf{x}_0)(x,y) &= \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{32}+\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{32}\right\}(x+y)-\frac{\sqrt{2}}{32}\left[x^2+2xy+y^2\right]\\
&= \frac{23\sqrt{2}}{32}+\frac{10\sqrt{2}}{32}(x+y)-\frac{\sqrt{2}}{32}\left[x^2+2xy+y^2\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= h(x_0,y_0)+h_x(x_0,y_0)(x-x_0)+h_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(h_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2h_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+h_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)\\
&\quad +o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2\right)+o\left(x^2+y^2\right)\\
&= T_2(h;\mathbf{x}_0)(x,y)+R
\end{aligned}
$$

mit

$$T_2(h;\mathbf{x}_0)(x,y)=x^2+y^2.$$

$$
\begin{aligned}
h(0,0) &= \sin(0)=0\\
h_x(0,0) &= h_y(0,0)=0,\\
h_{xx}(0,0) &= h_{yy}(0,0)=2,\\
h_{xy}(0,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

(G 6)

Sei

$$
f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}
$$

Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist aber, dass im Nullpunkt gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Sind $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ bzw. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ im Nullpunkt stetig?

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $(x,y) \neq (0,0)$ *und* $(x,y) = (0,0)$ *getrennt.*

LÖSUNG:

Wir berechnen erst die erste partielle Ableitung im Nullpunkt aus der Definition.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_y(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\left(3x^2y - y^3\right)\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^3y - xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = y\frac{\left(x^2+y^2\right)^2 + 2\left(x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= y + 2y^3\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
f_y'(x,y) &= \frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= \frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2y^2x^3+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = x\frac{-\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^4-x^2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= -x+2x^3\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Dann können wir auch aus der Definition die zweite partielle Ableitung berechnen

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+2h^3\frac{0-h^2}{h^4}-0}{h} = -1, \\
f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h+2h^3\frac{h^2-0}{h^4}-0}{h} = 1.
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Aus dem Satz von Schwarz wissen wir aber, dass falls f_{xy} und f_{yx} stetig wären, dann gilt auch $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Deswegen können f_{xy} und f_{yx} in Nullpunkt nicht stetig sein.

(G 7)

(a) Lösen Sie eine Substanz in Wasser, so liegt der Gefrierpunkt der Lösung unter dem des reinen Wassers. Es gilt dabei die folgende Gleichung:

$$\ln\left(x_{Wasser}\right) = K\cdot T^*\left(1-\frac{T^*}{T^*-\Delta T}\right).$$

x_{Wasser} ist der Molenbruch des Wassers in der Lösung, K ist die kryoskopische Konstante des Wassers, T^* ist der Gefrierpunkt des reinen Wassers und ΔT ist die Gefrierpunktserniedrigung der Lösung gegenüber dem reinen Wasser. Vereinfachen Sie die Gleichung so, dass Sie einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Molebruch des gelösten Stoffes und der Gefrierpunktserniedrigung erhalten für sehr kleine Konzentrationen des gelösten Stoffs. Nutzen Sie dazu die Taylor-Entwicklung zur Linearisierung entsprechender Terme.

(b) Entwickeln Sie die van-der Waals-Gleichung

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)\cdot\left(V_m-b\right) = RT$$

in einer Taylor-Reihe für den Fall, dass das Molvolumen V_m sehr viel größer ist als das Kovolumen b des Gases. Identifizieren Sie den Term, der für die Abweichung vom idealen Gasverhalten ($pV_m = RT$) verantwortlich ist. Wann verschwindet dieser Term? Geben Sie die Temperatur als Funktion der van-der-Waals-Parameter an, bei der dies geschieht (sogenannte Boyle-Temperatur).

LÖSUNG:

(a) Sei x_S der Molenbruch des gelösten Stoffes. Dann gilt $x_{Wasser} + x_S = 1$ und es folgt das für sehr kleine x_S gilt

$$\ln(x_{Wasser}) = \ln(1 - x_S) \approx -x_S.$$

Falls x_S ist sehr klein dann ist auch $\Delta T/T^*$sehr klein und

$$K \cdot T^* \left(1 - \frac{T^*}{T^* - \Delta T}\right) = KT^* - \frac{KT^*}{1 - \frac{\Delta T}{T^*}} \approx KT^* - KT^* \left(1 + \frac{\Delta T}{T^*}\right) = -K\Delta T.$$

Es gilt damit das

$$x_S \approx K\Delta T.$$

(b) Falls $V_m \gg b$ können wir die Gleichung als

$$RT = \left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = pV_m + \frac{a}{V_m} - pb - \frac{ab}{V_m^2} \approx pV_m + \frac{a}{V_m} - pb$$

schreiben. Man sieht sofort, dass die Abweichung vom idealen Gasverhalten $pV_m = RT$ durch $\frac{a}{V_m} - pb$ gegeben ist. Dieser Term verschwindet falls $a = pbV_m$ gilt. Für $a = pbV_m$ haben wir

$$T = \frac{pV_m + \frac{a}{V_m} - pb}{R} = \frac{pV_m}{R} = \frac{a}{bR}.$$

Hausübungen

(H 3) [2+4+4P]

(a) Sei

$$f(x,y) = x^2 y^3.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,1)$ in Richtung $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

(b) Sei

$$g(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}.$$

Geben Sie das Taylorpolynome zweiten Grades für g im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$ an.

(c) Sei

$$h(x,y) = (x+1)^{y+1}.$$

Geben Sie das Taylorpolynome zweiten Grades für h im Nullpunkt an.