



Höhere Mathematik II

2. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 19

Gruppenübungen

(G 3)

(a) Berechnen Sie den Gradienten folgender Funktionen:

$$f_1(x,y) = \sin(xy^3),$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit von der Funktion f_2 in $(0,0)$. Kann man den Wert $f_2(0,0)$ so wählen das f_2 in \mathbb{R}^2 stetig ist?

LÖSUNG:

(a) $f_1(x,y) = \sin(xy^3)$ und

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^3 \cos(xy^3),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3xy^2 \cos(xy^3).$$

Damit ist der Gradient

$$\nabla f_1 = (y^3 \cos(xy^3), 3xy^2 \cos(xy^3)).$$

Es ist klar, dass $f_2(x, y) = f_2(y, x)$ und damit ist $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(y, x)$. Wir können f_2 für $(x, z) \neq (0, 0)$ so schreiben:

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{2y(x^2 + y^2) - 2xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = -2y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(y, x) = -2x \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Der Gradient ist

$$\nabla f_2(x, y) = \left(-2y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, -2x \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

(b) Die Funktion $f_2(x, y) = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ist in $(0, 0)$ nicht stetig, weil $f_2(0, 0) = 1$ ist, aber der Grenzwert in $(0, 0)$ nicht existiert. Um das zu zeigen nehmen wir zwei Folgen die beide nach $(0, 0)$ konvergiert:

$$\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \geq 1} \quad \text{und} \quad \{\mathbf{y}_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \right\}_{n \geq 1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(\mathbf{x}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2 \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 2 \quad \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(\mathbf{y}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_2\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1 + \frac{0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

Weil $2 \neq 1$ kann f_2 in $(0, 0)$ nicht stetig sein.

(G 4)

- (a) Die ideale Gasgleichung lautet: $p \cdot V_m = R \cdot T$, wobei $V_m = V/n$ das molare Volumen ist. Berechnen Sie den Gradienten und alle zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $p = p(V_m, T)$. Was fällt ihnen auf?

- (b) Bilden Sie die partiellen Ableitungen des Druckes p nach Volumen V , Temperatur T und Stoffmenge n für die folgende Gleichung, die das Verhalten realer Gase beschreibt (van der Waals-Gleichung; a , b und R sind Konstante):

$$\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right)(V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T.$$

LÖSUNG:

- (a) Es folgt, dass

$$p = p(V_m, T) = \frac{RT}{V_m}$$

und damit gilt

$$\frac{\partial p}{\partial V_m} = -\frac{RT}{V_m^2} \text{ und } \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V_m}.$$

Die höhere partielle Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial T \partial V_m} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial V_m} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{RT}{V_m^2} \right) = -\frac{R}{V_m^2}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial V_m \partial T} &= \frac{\partial}{\partial V_m} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial V_m} \left(\frac{R}{V_m} \right) = -\frac{R}{V_m^2}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R}{V_m} \right) = 0 \text{ und} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2} &= \frac{\partial}{\partial V_m} \left(\frac{\partial p}{\partial V_m} \right) = \frac{\partial}{\partial V_m} \left(-\frac{RT}{V_m^2} \right) = \frac{2RT}{V_m^3}. \end{aligned}$$

Man sieht dann das die beide gemischte partielle zweite Ableitungen sind gleich:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V_m \partial T} = -\frac{R}{V_m^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial T \partial V_m}.$$

- (b) Wir betrachten

$$\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right)(V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

und leiten beide Seiten nach V , T und n ab unter der Voraussetzung, dass $p = p(V, T, n)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} \left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) (V - n \cdot b) &= \frac{\partial}{\partial V} n \cdot R \cdot T \\ &\Leftrightarrow \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V} - \frac{2n^2 a}{V^3} \right) (V - nb) + \left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2n^2 a}{V^3} - \frac{1}{V - nb} \left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) \end{aligned}$$

falls $V \neq nb$ und falls $V = nb$ (d.h. entweder $T = 0$ oder $n = 0$) gilt aus obiger Gleichung, dass

$$p = -\frac{an^2}{V^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{2an^3}{V^3}.$$

Es gilt auch, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) (V - n \cdot b) &= \frac{\partial}{\partial T} n \cdot R \cdot T \\ \Leftrightarrow \\ \frac{\partial p}{\partial T} (V - nb) &= nR \\ \Leftrightarrow \\ \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{nR}{V - nb} \end{aligned}$$

falls $V \neq nb$ und falls $V = nb$ können wir nichts über $\frac{\partial p}{\partial T}$ sagen. Zuletzt haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) (V - n \cdot b) &= \frac{\partial}{\partial n} n \cdot R \cdot T \\ \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{2na}{V^2} \right) (V - nb) - b \left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) &= RT \\ \Leftrightarrow \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= -\frac{2na}{V^2} + \frac{1}{V - nb} \left[b \left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) + RT \right] \end{aligned}$$

falls $V \neq nb$ und falls $V = nb$ gilt

$$-b \left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) = RT \Rightarrow p = -\frac{n^2 a}{V^2} - \frac{RT}{b} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{2na}{V^2}.$$

Wir haben jetzt gezeigt das falls $V \neq nb$ dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2n^2 a}{V^3} - \frac{1}{V - nb} \left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{nR}{V - nb}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= -\frac{2na}{V^2} + \frac{1}{V - nb} \left[b \left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) + RT \right]. \end{aligned}$$

Falls $V = nb$ (d.h. $T = 0$ oder $n = 0$) dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2n^2 a}{V^3}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= -\frac{2na}{V^2} \end{aligned}$$

und wir können nichts über $\frac{\partial p}{\partial T}$ sagen.

Hausübungen

(H 2) [10=2+2+2+2+2P]

(a) Berechnen Sie den Gradient folgender Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$

$$f_1(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$

$$f_2(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy + x^3y^3},$$

$$f_3(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

$$g_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy-1}{x-1}, & (x, y) \neq (1, 1), \\ a_1, & (x, y) = (1, 1), \end{cases}$$

$$g_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x-1}, & (x, y) \neq (1, 1), \\ a_2, & (x, y) = (1, 1), \end{cases}$$

Kann man die Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ so wählen, dass g_i auf ganz \mathbb{R}^2 stetig ist ($i = 1, 2$)?

Hinweise/Test (a): Die Gradienten und Hessematrizen in dem Punkt $(x, y) = (1, 1)$ sind

$$\nabla f_1(1, 1) = \left(\cos(2) - \frac{1}{2} \sin(2), \cos(2) - \frac{1}{2} \sin(2) \right),$$

$$\nabla f_2(1, 1) = \left(\frac{1}{2} \cos(1) - \sin(1), \frac{1}{2} \cos(1) - \sin(1) \right),$$

$$\nabla f_3(1, 1) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} (1, 1).$$

Bitte vergleichen Sie ihre Lösungen mit diese Werten vor der Abgabe!