Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009 12.5.2009

Höhere Mathematik II

2. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 19

Gruppenübungen

(G 3)

(a) Berechnen Sie den Gradienten folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \sin\left(xy^3\right), \\ f_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit von der Funktion f_2 in $(0,0)$. Kann man den Wert $f_2(0,0)$ so wählen das f_2 in $\mathbb{R}^2$ stetig ist?

LÖSUNG:

(a) $f_1(x,y) = \sin\left(xy^3\right)$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= y^3 \cos\left(xy^3\right), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 3xy^2 \cos\left(xy^3\right). \end{aligned}$$

Damit ist der Gradient

$$\nabla f_1 = \left(y^3 \cos\left(xy^3\right), 3xy^2 \cos\left(xy^3\right)\right).$$

Es ist klar, dass $f_2(x,y) = f_2(y,x)$ und damit ist $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(y,x)$. Wir können f_2 für $(x,z) \neq (0,0)$ so schrieben:

$$f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{2y\left(x^2+y^2\right) - 2xy(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\frac{y^3 - x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -2y\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(y,x) = -2x\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Der Gradient ist

$$\nabla f_2(x,y) = \left(-2y\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, -2x\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right).$$

(b) Die Funktion $f_2(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ist in $(0,0)$ nicht stetig, weil $f_2(0,0) = 1$ ist, aber der Grenzwert in $(0,0)$ nicht existiert. Um das zu zeigen nehmen wir zwei Folgen die beide nach $(0,0)$ konvergiert:

$$\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 1} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\geq 1} \text{ und } \{\mathbf{y}_n\}_{n\geq 1} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}_{n\geq 1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_2(\mathbf{x}_n) = \lim_{n\to\infty} f_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) &= 1 + \frac{2\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 2 \text{ und} \\
\lim_{n\to\infty} f_2(\mathbf{y}_n) = \lim_{n\to\infty} f_2\left(\frac{1}{n}, 0\right) &== 1 + \frac{0}{1+0} = 1.
\end{aligned}$$

Weil $2 \neq 1$ kann f_2 in $(0,0)$ nicht stetig sein.

(G 4)

(a) Die ideale Gasgleichung lautet: $p \cdot V_m = R \cdot T$, wobei $V_m = V/n$ das molare Volumen ist. Berechnen Sie den Gradienten und alle zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $p = p(V_m, T)$. Was fällt ihnen auf?

(b) Bilden Sie die partiellen Ableitungen des Druckes p nach Volumen V, Temperatur T und Stoffmenge n für die folgende Gleichung, die das Verhalten realer Gase beschreibt (van der Waals-Gleichung; a , b und R sind Konstante):

$$\left(p+\frac{n^2\cdot a}{V^2}\right)(V-n\cdot b)=n\cdot R\cdot T.$$

LÖSUNG:

(a) Es folgt, dass

$$p=p(V_m,T)=\frac{RT}{V_m}$$

und damit gilt

$$\frac{\partial p}{\partial V_m}=-\frac{RT}{V_m^2}\text{ und }\quad \frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V_m}.$$

Die höhere partielle Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial T\partial V_m} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{RT}{V_m^2}\right)=-\frac{R}{V_m^2},\\
\frac{\partial^2 p}{\partial V_m\partial T}= &= \frac{\partial}{\partial V_m}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial V_m}\left(\frac{R}{V_m}\right)=-\frac{R}{V_m^2},\\
\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{R}{V_m}\right)=0\text{ und}\\
\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2} &= \frac{\partial}{\partial V_m}\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)=\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{RT}{V_m^2}\right)=\frac{2RT}{V_m^3}.
\end{aligned}$$

Man sieht dann das die beide gemischte partielle zweite Ableitungen sind gleich:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V_m\partial T}=-\frac{R}{V_m^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial T\partial V_m}.$$

(b) Wir betrachten

$$\left(p+\frac{n^2\cdot a}{V^2}\right)(V-n\cdot b)=n\cdot R\cdot T$$

und leiten beide Seiten nach V T und n ab unter der Voraussetzung, dass $p=p(V,T,n)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial V}\left(p+\frac{n^2\cdot a}{V^2}\right)(V-n\cdot b) &= \frac{\partial}{\partial V}n\cdot R\cdot T\\
&\Leftrightarrow\\
\left(\frac{\partial p}{\partial V}-\frac{2n^2a}{V^3}\right)(V-nb)+\left(p+\frac{n^2\cdot a}{V^2}\right) &= 0\\
&\Leftrightarrow\\
\frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2n^2a}{V^3}-\frac{1}{V-nb}\left(p+\frac{n^2a}{V^2}\right)
\end{aligned}$$

falls $V \neq nb$ und falls $V = nb$ (d.h. entweder $T = 0$ oder $n = 0$) gilt aus obiger Gleichung, dass

$$p = -\frac{an^2}{V^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} = \frac{2an^3}{V^3}.$$

Es gilt auch, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right)(V - n \cdot b) &= \frac{\partial}{\partial T} n \cdot R \cdot T \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{\partial p}{\partial T}(V - nb) &= nR \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{nR}{V - nb}
\end{aligned}$$

falls $V \neq nb$ und falls $V = nb$ können wir nichts über $\frac{\partial p}{\partial T}$ sagen. Zuletzt haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right)(V - n \cdot b) &= \frac{\partial}{\partial n} n \cdot R \cdot T \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{2na}{V^2}\right)(V - nb) - b\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right) &= RT \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{\partial p}{\partial n} &= -\frac{2na}{V^2} + \frac{1}{V - nb}\left[b\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) + RT\right]
\end{aligned}$$

falls $V \neq nb$ und falls $V = nb$ gilt

$$-b\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right) = RT \Rightarrow p = -\frac{n^2 a}{V^2} - \frac{RT}{b} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{2na}{V^2}.$$

Wir haben jetzt gezeigt das falls $V \neq nb$ dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2n^2 a}{V^3} - \frac{1}{V - nb}\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right), \\
\frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{nR}{V - nb}, \\
\frac{\partial p}{\partial n} &= -\frac{2na}{V^2} + \frac{1}{V - nb}\left[b\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) + RT\right].
\end{aligned}$$

Falls $V = nb$ (d.h. $T = 0$ oder $n = 0$) dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{2n^2 a}{V^3}, \\
\frac{\partial p}{\partial n} &= -\frac{2na}{V^2}
\end{aligned}$$

und wir können nichts über $\frac{\partial p}{\partial T}$ sagen.

Hausübungen

(H 2) [10=2+2+2+2+2P]

(a) Berechnen Sie den Gradient folgender Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, = 1,2,3$

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, \\ f_2(x,y) &= \frac{\sin(xy)}{xy+x^3y^3}, \\ f_3(x,y) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \begin{cases} \frac{xy-1}{x-1}, & (x,y) \neq (1,1), \\ a_1, & (x,y) = (1,1), \end{cases} \\ g_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{x-y}{x-1}, & (x,y) \neq (1,1), \\ a_2, & (x,y) = (1,1), \end{cases} \end{aligned}$$

Kann man die Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ so wählen, dass g_i auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist ($i = 1,2$)?

Hinweise/Test (a): Die Gradienten und Hessematrizen in dem Punkt $(x,y) = (1,1)$ sind

$$\begin{aligned} \nabla f_1(1,1) &= \left(\cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2), \cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2)\right), \\ \nabla f_2(1,1) &= \left(\frac{1}{2}\cos(1) - \sin(1), \frac{1}{2}\cos(1) - \sin(1)\right), \\ \nabla f_3(1,1) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}(1,1). \end{aligned}$$

Bitte vergleichen Sie ihre Lösungen mit diese Werten vor der Abgabe!

LÖSUNG:

(a) (1) Es ist klar, dass $f_1(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ symmetrisch in x und y ist. Damit folgt das $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(y,x)$. Wir berechnen einfach das

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x\cos\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right) - 2x\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)} - \frac{2x\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \\
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(y,x)
\end{aligned}$$

und damit ist die Gradient

$$\begin{aligned}
\nabla f_1(x,y) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \text{ mit} \\
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{2x\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)} - \frac{2x\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \text{ und} \\
\frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{2y\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)} - \frac{2y\sin\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \\
\nabla f_1(1,1) &= \left(\cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2), \cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2)\right).
\end{aligned}$$

(2) $f_2(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy+x^3y^3}$, $xy \neq 0$ is symmetrisch, d.h. $f_2(x,y) = f_2(y,x)$. Deswegen gilt $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(y,x)$. Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{y\cos(xy)\left(xy+x^3y^3\right) - \sin(xy)\left(y+3x^2y^3\right)}{\left(xy+x^3y^3\right)^2} \\
&= \cos(xy)\frac{1}{\left(x+x^3y^2\right)} - \sin(xy)\frac{y+3x^2y^3}{\left(xy+x^3y^3\right)^2}
\end{aligned}$$

und damit ist der Gradient von f_2:

$$\begin{aligned}
\nabla f_2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) \text{ mit} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \cos(xy)\frac{1}{\left(x+x^3y^2\right)} - \sin(xy)\frac{y+3x^2y^3}{\left(xy+x^3y^3\right)^2} \text{ und} \\
\frac{\partial f_2}{\partial y} &= \cos(xy)\frac{1}{\left(y+y^3x^2\right)} - \sin(xy)\frac{x+3y^2x^3}{\left(xy+x^3y^3\right)^2}.
\end{aligned}$$

In der Punkt $(1,1)$ gilt

$$\nabla f_2(1,1) = \left(\frac{1}{2}\cos(1) - \sin(1), \frac{1}{2}\cos(1) - \sin(1)\right).$$

(3) $f_3(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$. Dann ist wie vorhier f_3 symmetrisch und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial x} &= \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
\frac{\partial f_3}{\partial y} &= \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

also ist die Gradient

$$\begin{aligned}
\nabla f_3(x,y) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y), \\
\nabla f_3(1,1) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}(1,1).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
g_1(x,y) &= \begin{cases} \frac{xy-1}{x-1}, & (x,y) \neq (1,1), \\ a_1, & (x,y) = (1,1), \end{cases} \\
g_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{x-y}{x-1}, & (x,y) \neq (1,1), \\ a_2, & (x,y) = (1,1). \end{cases}
\end{aligned}$$

(1) Für $g_1(x,y)$ müßen wir die Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{x-1}$ untersuchen. Wir nehemen zwei Folgen in $\mathbb{R}^2$ die beide nach $(1,1)$ konvergiert:
$\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 1} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ und $\{\mathbf{y}_n\}_{n\geq 1} = \left\{1+\frac{1}{n}, 1\right\}_{n\geq 1}$dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_1(\mathbf{x}_n) &= \lim_{n\to\infty} g_1\left(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1}{\frac{1}{n}+1-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 2 = 2, \\
\lim_{n\to\infty} g_1(\mathbf{y}_n) &= \lim_{n\to\infty} g_1\left(1+\frac{1}{n}, 1\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}+1-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.
\end{aligned}$$

Weil die beide Grenzwerten nicht übeinstimmen existiert die Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g_1(x,z)$ nicht und man kann nicht a_1 wählen so das $g_1$stetig auf $\mathbb{R}^2$ wird.

(2) Wir nehmen auch hier zwei Folgen $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 1} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ und $\{\mathbf{y}_n\}_{n\geq 1} = \left\{1+\frac{1}{n}, 1\right\}_{n\geq 1}$ dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} g_2(\mathbf{x}_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} g_2(\mathbf{y}_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-1}{1+\frac{1}{n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

Weil die beide Grenzwerten nicht übeinstimmen existiert die Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g_2(x,z)$ nicht und man kann nicht a_2 wählen so das $g_2$stetig auf $\mathbb{R}^2$ wird.