Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 24.4.2009

Höhere Mathematik II

2. Übung

Abgabe Hausübungen: W. 19

Gruppenübungen

(G 3)

(a) Berechnen Sie den Gradienten folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \sin\left(xy^3\right), \\ f_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit von der Funktion f_2 in $(0,0)$. Kann man den Wert $f_2(0,0)$ so wählen das f_2 in $\mathbb{R}^2$ stetig ist?

(G 4)

(a) Die ideale Gasgleichung lautet: $p \cdot V_m = R \cdot T$, wobei $V_m = V/n$ das molare Volumen ist. Berechnen Sie den Gradienten und alle zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $p = p(V_m, T)$. Was fällt ihnen auf?

(b) Bilden Sie die partiellen Ableitungen des Druckes p nach Volumen V, Temperatur T und Stoffmenge n für die folgende Gleichung, die das Verhalten realer Gase beschreibt (van der Waals-Gleichung; a , b und R sind Konstante):

$$\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right)(V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T.$$

Hausübungen

(H 2) [10=2+2+2+2+2P]

(a) Berechnen Sie den Gradient folgender Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, = 1,2,3$

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, \\ f_2(x,y) &= \frac{\sin(xy)}{xy+x^3y^3}, \\ f_3(x,y) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

(b) Untersuchen Sie die Stetigkeit folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \begin{cases} \frac{xy-1}{x-1}, & (x,y) \neq (1,1), \\ a_1, & (x,y) = (1,1), \end{cases} \\ g_2(x,y) &= \begin{cases} \frac{x-y}{x-1}, & (x,y) \neq (1,1), \\ a_2, & (x,y) = (1,1), \end{cases} \end{aligned}$$

Kann man die Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ so wählen, dass g_i auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist ($i = 1,2$)?

Hinweise/Test (a): Die Gradienten und Hessematrizen in dem Punkt $(x,y) = (1,1)$ sind

$$\begin{aligned} \nabla f_1(1,1) &= \left(\cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2), \cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2)\right), \\ \nabla f_2(1,1) &= \left(\frac{1}{2}\cos(1) - \sin(1), \frac{1}{2}\cos(1) - \sin(1)\right), \\ \nabla f_3(1,1) &= \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}(1,1). \end{aligned}$$

Bitte vergleichen Sie ihre Lösungen mit diese Werten vor der Abgabe!