



Höhere Mathematik II

1. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 18

Gruppenübungen

(G 1)

Geben Sie die Lösungsmenge für die folgenden Gleichungssysteme an:

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = 0, \\ 5x + 5y + 5z = 5. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ 5y - z = 1. \end{cases}$$

LÖSUNG:

(a) Hier können wir direkt auflösen: $x_1 = \frac{1}{3}(1 - 2x_2)$ aus der ersten Gleichung und eingesetzt in die zweite bekommen wir $\frac{2}{3}(1 - 2x_2) + 3x_2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{5}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{5}$ und $x_1 = \frac{3}{5}$. Die Lösungsmenge ist $M = \left\{ \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5} \right) \right\}$.

(b) Mit dem Gaußverfahren und A als zugehörigen Matrix haben wir

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right)$$
$$(r_2 \rightarrow r_2 - r_1, r_3 \rightarrow r_3 - 5r_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$(r_2 \rightarrow -\frac{1}{2}r_2, r_1 \rightarrow r_1 - r_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

also ist die Lösungsmenge durch $y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}$ und $x + \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}$ definiert. Sei $z = t \in \mathbb{R}$ ein Variable, dann können wir die Lösungsmenge als $M = \{(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ schreiben. Diese Menge beschreibt ein Gerade durch den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ und mit Richtungsvektor $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

(c) Mit dem Gaussverfahren und A als zugehörige Matrix haben wir

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$(r_2 \rightarrow r_2 - 2r_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

also gilt $5y - z = 1$ und $5y - z = 0$ weil $0 \neq 1$ gibt es keine Lösungen und die Lösungsmenge ist einfach die leere Menge $M = \emptyset$.

(G 2)

Geben Sie die Lösungsmenge M_a des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + az = 0, \\ x + ay = 0 \end{cases}$$

für jeden Wert der reellen Variablen $a \in \mathbb{R}$ an.

LÖSUNG:

Die zugehörige Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

und das Gaussverfahren läuft wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(r_2 - r_1, r_3 - r_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 2a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir machen jetzt eine Fallentscheidung: Falls $a = 1$ dann ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Lösungsmenge ist die Gerade $M_1 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

Falls $a = \frac{1}{2}$ gilt

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

und die Lösungsmenge ist die Gerade $M_{\frac{1}{2}} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.

Falls $a \neq 1, \frac{1}{2}$ dann ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 2a-1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(r_2 \rightarrow \frac{1}{a-1}r_2, r_3 \rightarrow \frac{1}{2a-1}r_3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Lösungsmenge ist einfach der Nullpunkt $M = \{(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$.

Hausübungen

(H 1) [10P]

Bestimmen Sie für jeden Werte der reellen Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + y + z + w &= 0, \\ y + az + w &= 0, \\ x + w &= b, \\ z + w &= 2b, \\ x + y &= 0. \end{cases}$$