Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 4.5.2009

Höhere Mathematik II

1. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. 18

Gruppenübungen

(G 1)

Geben Sie die Lösungsmenge für die folgenden Gleichungssysteme an:

$$\text{(a)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 & = 0. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x + y + z & = 1, \\ x - y + 2z & = 0, \\ 5x + 5y + 5z & = 5. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x - y + z & = 0, \\ 2x + 3y + z & = 0, \\ 5y - z & = 1. \end{cases}$$

LÖSUNG:

(a) Hier können wir direkt auslösen: $x_1 = \frac{1}{3}(1 - 2x_2)$ aus der ersten Gleichung und eingesetzt in die zweite bekommen wir $\frac{2}{3}(1 - 2x_2) + 3x_2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{5}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{5}$ und $x_1 = \frac{3}{5}$. Die Loesungsmenge ist $M = \left\{ \left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5} \right) \right\}$.

(b) Mit dem Gaussverfahren und A als zugehörigen Matrix haben wir

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right) \\ (r_2 \to r_2 - r_1, r_3 \to r_3 - 5r_1) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (r_2 \to -\frac{1}{2}r_2, r_1 \to r_1 - r_2) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

also ist die Lösungsmenge durch $y-\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}$ und $x+\frac{3}{2}z=\frac{1}{2}$ definiert. Sei $z=t\in\mathbb{R}$ ein Variable, dann können wir die Lösungsmenge als $M=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t,t\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}$ schreiben. Diese Menge beschreibt ein Gerade durch den Punkt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ und mit Richtungsvektor $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

(c) Mit dem Gaussverfahren und A als zugehörige Matrix haben wir

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ (r_2 \to r_2 - 2r_1) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

also gilt $5y-z=1$ und $5y-z=0$ wiel $0\neq 1$ gibt es keine Lösungen und die Lösungsmenge ist einfach die leere Menge $M=\emptyset$.

(G 2)

Geben Sie die Lösungsmenge M_a des homogenen Gleichungssystem

$$\begin{cases} x+y+z &= 0, \\ x+y+az &= 0, \\ x+ay &= 0 \end{cases}$$

für jeden Wert der rellen Variablen $a\in\mathbb{R}$ an.

LÖSUNG:

Die zugehörige Matrix ist

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix}$$

und das Gaussverfahren läuft wie folgt:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix} \\ (r_2-r_1, r_3-r_1) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 2a-1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir machen jetzt eine Fallentschiedung: Falls $a = 1$ dann ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Lösungsmenge ist die Gerade $M_1 = \left\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+z=0\right\}$.

Falls $a = \frac{1}{2}$ gilt

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

und die Lösungsmenge ist die Gerade $M_{\frac{1}{2}} = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y=0\right\}$.

Falls $a \neq 1, \frac{1}{2}$ dann ist

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 2a-1 & 0 \end{pmatrix} \\ (r_2 \to \frac{1}{a-1} r_2, r_3 \to \frac{1}{2a-1} r_3) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die Lösungsmenge ist einfach der Nullpunkt $M = \left\{(0,0,0) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Hausübungen

(H 1) [10P]

Bestimmen Sie für jeden Werte der rellen Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 0, \\ y+az+w &= 0, \\ x+w &= b, \\ z+w &= 2b, \\ x+y &= 0. \end{cases}$$

LÖSUNG:

Die Matrix ist

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und mit dem Gaussverfahrend haben wir

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ (r_3 \to r_3 - r_1, r_5 \to r_5 - r_1) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ (r_1 \to r_1 - r_2, r_3 \to r_3 + r_2, r_5 \to r_5 + r_4) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b \end{array}\right). \end{aligned}$$

Aus die letzte gleichung sehen wir das $b = 0$, sonst gibt es keine Lösungen, d.h. die

Lösungsmenge ist $\emptyset$. Wir rechnen wieder unter die annahme das b:

$$\begin{aligned} A &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ (r_1 \to r_1 - (1-a)\,r_4, r_2 \to r_2 - ar_4,\, r_3 \to r_3 - (a-1)\,r_4) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Aus die dritte Gleichung sehen wir das wir die zwei Fälle $a = 2$ und $a \neq 2$ separat untersuchen müß.

Falls $a = 2$. Dann gilt

$$A \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und wir könnnen z.B. $w = t$ als Parameter wählen. Die Lösungsmenge ist

$$M_{a=2} = \{(-t, t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Falls $a \neq 2$ dann teilen wir r_3 mit $2-a$ und sieht einfach das $w = 0$ und $x = y = z = 0$. Die Lösungsmenge ist

$$M_{a\neq 2} = \{(0,0,0,0)\}.$$