



# Lie Algebren

## 13. Übung

**Aufgabe 71** Sei  $A$  eine rationale  $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, daß der Rang von  $A$  über  $\mathbb{Q}$  gleich dem Rang von  $A$  über  $\mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 72** Sei  $A$  eine komplexe  $n \times n$ -Matrix,  $V$  ein  $G(A)$ -Modul in  $\mathcal{O}$  und  $\mu \in H^*$ . Beweisen Sie, daß  $[V : L(\mu)]$  genau dann positiv ist, wenn  $\mu$  primitives Gewicht ist.

**Aufgabe 73** Sei  $A$  eine komplexe  $n \times n$ -Matrix und  $V$  ein  $G(A)$ -Modul in  $\mathcal{O}$ . Zeigen Sie

$$\text{ch}(V) = \sum_{\lambda \in H^*} [V : L(\lambda)] \text{ch}(L(\lambda)).$$

**Aufgabe 74** Sei  $G(A)$  eine Kac-Moody Algebra. Beweisen Sie, daß der irreduzible Höchstgewichtsmodul  $L(\Lambda)$  mit höchstem Gewicht  $\Lambda$  genau dann integrabel ist, wenn  $\Lambda \in P_+$  ist.