Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 09 7. Juli 2009

Lie Algebren

12. Übung

Aufgabe 66 Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine unzerlegbare verallgemeinerte Cartan Matrix. Beweisen Sie folgende Aussagen:
1) Ist A vom endlichen Typ, so ist Δ^{im} leer.
2) Ist A affin, so ist $\Delta_+^{im} = \{m\delta \,|\, m = 1, 2, \dots\}$, wobei $\delta = \sum_{j=1}^n c_j\alpha_j$ mit $c_j \in \mathbb{Z}$, $c_j > 0$ $(c_1, \dots, c_n) = 1$ und $Ac = 0$ für $c = (c_j)_{j=1}^n$.

Aufgabe 67 Sei $G(A)$ eine unendlich-dimensionale Kac-Moody Algebra. Zeigen Sie, daß $|\Delta^{re}| = \infty$.

Aufgabe 68 Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Algebra. Beweisen Sie folgende Aussagen:
1) Ist V in $\mathcal{O}$ und U ein Untermodul von V, so sind auch U und V/U in $\mathcal{O}$.
2) Seien V_1 und V_2 in $\mathcal{O}$. Dann sind auch $V_1 \oplus V_2$ und $V_1 \otimes V_2$ in $\mathcal{O}$.

Aufgabe 69 Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Algebra und V in $\mathcal{O}$. Zeigen Sie, daß V beschränkt ist.

Aufgabe 70 Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Algebra und V ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gewicht Λ. Beweisen Sie folgende Aussagen:
1) $V = \oplus_{\mu \leq \Lambda} V_\mu$, $V_\Lambda = \mathbb{C}v_\Lambda$, $\dim(V_\mu) < \infty$, V ist in $\mathcal{O}$
2) V hat einen eindeutigen maximalen echten Untermodul.
3) Jeder nichttriviale Quotient von V ist wieder ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gewicht Λ.