Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 26. Mai 2009

Lie Algebren

6. Übung

Aufgabe 38 Zeigen Sie, daß die Menge der Diagonalmatrizen eine selbstnormalisierende Unteralgebra von $sl_{n+1}(\mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 39 Zeigen Sie, daß $sl_{n+1}(\mathbb{C})$ ein Wurzelsystem vom Typ A_n hat.

Aufgabe 40 Sei $X = \{x_j \,|\, j \in J\}$ eine Menge, V ein Vektorraum mit Basis X und $T(V)$ die Tensoralgebra von V. Sei FL die Unteralgebra von $T(V)_L$ erzeugt von X und $i : X \to FL$ die natürliche Einbettung. Zeigen Sie, daß (FL, i) eine freie Lie Algebra über X ist.

Aufgabe 41 Für $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ bezeichne W_m den irreduziblen $sl_2(\mathbb{C})$-Modul der Dimension $m+1$. Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten von $W_3 \otimes W_1$.

Aufgabe 42 Zerlegen Sie $W_m \otimes W_n$ in irreduzible Darstellungen von $sl_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 43 Sei $G = sl_3(\mathbb{C})$. Skalieren Sie die nichtausgeartete invariante Bilinearform auf G so, daß die Wurzeln Norm 2 haben. Zeigen Sie, daß die Dimension des irreduziblen G-Moduls $L(\lambda)$ mit höchstem Gewicht $\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ gegeben ist durch

$$\dim L(\lambda) = \frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)\,.$$