Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 19. Mai 2009

Lie Algebren

5. Übung

Aufgabe 32 Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem und $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ eine Basis von Φ. Zeigen Sie, daß es eine Wurzel $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ gibt, so daß für jede Wurzel $\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$

$$n_1 \geq m_1, \ldots, n_l \geq m_l$$

gilt.

Aufgabe 33 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ mit Cartan Unteralgebra H und Wurzelsystem Φ. Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ und $\beta \neq \pm\alpha$. Sei r die größte ganze Zahl, so daß $\beta - r\alpha$ eine Wurzel ist, und q die größte ganze Zahl, so daß $\beta + q\alpha$ eine Wurzel ist. Zeigen Sie, daß alle $\beta + j\alpha$, $-r \leq j \leq q$, Wurzeln sind und $r - q = \beta(h_\alpha)$ gilt.

Aufgabe 34 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ mit Cartan Unteralgebra H und Wurzelsystem Φ. Seien $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$. Beweisen Sie, daß

$$[G_\alpha, G_\beta] = G_{\alpha+\beta}\,.$$

Aufgabe 35 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ mit Cartan Unteralgebra H und Wurzelsystem Φ. Sei $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ eine Basis von Φ. Sei $h_i = h_{\alpha_i}$. Wähle $x_i \in G_{\alpha_i}, y_i \in G_{-\alpha_i}$ mit $[x_i, y_i] = h_i$. Definiere $a_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = \alpha_j(h_i)$. Zeigen Sie, daß G von den Elementen x_i, h_i, y_i erzeugt wird und die Relationen

$$\begin{aligned}
&[h_i, h_j] = 0 \\
&[x_i, y_j] = \delta_{ij} h_i \\
&[h_i, x_j] = a_{ij} x_j,\ [h_i, y_j] = -a_{ij} y_j \\
&\mathrm{ad}(x_i)^{1-a_{ij}} x_j = \mathrm{ad}(y_i)^{1-a_{ij}} y_j = 0, \quad i \neq j
\end{aligned}$$

gelten.

Aufgabe 36 Sei L eine Lie Algebra und (U, i) eine universelle Einhüllende von L. Beweisen Sie, daß es einen eindeutigen Antiautomorphismus $\pi : U \to U$ gibt, so daß $\pi i = -i$. Zeigen Sie weiterhin, daß $\pi^2 = 1$.

Aufgabe 37 Sei L eine Lie Algebra und U eine universelle Einhüllende von L. Sei M eine Unteralgebra von L. Zeigen Sie, daß die Unteralgebra von U erzeugt von M eine universelle Einhüllende von M ist.