Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 12. Mai 2009

Lie Algebren

4. Übung

Aufgabe 25 Sei Φ ein Wurzelsystem und Δ eine Basis von Φ. Sei α eine positive, aber nicht einfache Wurzel. Zeigen Sie, daß es eine einfache Wurzel β gibt, so daß $\alpha - \beta$ eine positive Wurzel ist.

Aufgabe 26 Sei Φ ein Wurzelsystem und Δ eine Basis von Φ. Beweisen Sie, daß der Weyl Vektor ρ bei Spiegelung in einer Wurzel $\alpha \in \Delta$ übergeht in $\sigma_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$.

Aufgabe 27 Sei Φ ein Wurzelsystem in V und Δ eine Basis von Φ. Sei Φ' ein Wurzelsystem in V' mit Basis Δ' und $\phi : \Delta \to \Delta'$ eine Bijektion mit $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \Delta$. Zeigen Sie, daß ϕ eindeutig zu einer linearen Abbildung $f : V \to V'$ mit $f(\Phi) = \Phi'$ und $\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 28 Bestimmen Sie die Cartan Matrix zum Dynkin Diagramm F_4.

Aufgabe 29 Sei $V = \{ (x_1, \ldots, x_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} \,|\, \sum x_i = 0 \}$ und $L = \{ (x_1, \ldots, x_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} \,|\, x_i \in \mathbb{Z}, \sum x_i = 0 \}$. Zeigen Sie, daß die Vektoren der Norm 2 in L ein Wurzelsystem vom Typ A_l in V bilden und daß die zugehörige Weyl Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_{l+1} ist.

Aufgabe 30 Sei $L = \{ (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8 \,|\, \text{alle } x_i \in \mathbb{Z} \text{ oder alle } x_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \sum x_i = 0 \bmod 2 \}$. Zeigen Sie, daß die Vektoren der Norm 2 in L ein Wurzelsystem vom Typ E_8 bilden.

Aufgabe 31 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ mit Killing Form $(\ ,\ )$. Zeigen Sie, daß $(G_\alpha, G_\beta) = 0$ wenn $\alpha + \beta \neq 0$.