Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 09 5. Mai 2009

Lie Algebren

3. Übung

Aufgabe 18 Sei G eine Gruppe und $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G. Definieren Sie eine Modulstruktur auf dem Dualraum V^*.

Aufgabe 19 Sei G eine Lie Algebra und $\rho : G \to gl(V)$ eine lineare Darstellung von G. Definieren Sie eine Modulstruktur auf dem Dualraum V^*.

Aufgabe 20 Sei G eine endlichdimensionale einfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Seien $(\, , \,)_1$ und $(\, , \,)_2$ zwei nichtausgeartete invariante Bilinearformen auf G. Zeigen Sie, daß die beiden Formen proportional zueinander sind.

Aufgabe 21 Sei A die Algebra der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Für $x \in A$ bezeichne L_x die Linksmultiplikation mit x in A und R_x die Rechtsmultiplikation mit x. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{tr}(L_x R_y) = \mathrm{tr}(x)\,\mathrm{tr}(y)\,.$$

Berechnen Sie damit die Killing Form von $gl_n(\mathbb{C})$ und $sl_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 22 Zerlegen Sie $W_m \otimes W_n$ in irreduzible Darstellungen von $sl_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 23 Seien α, β Wurzeln mit $\beta \neq \pm\alpha$ und $(\alpha, \beta) > 0$. Zeigen Sie, daß $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist.

Aufgabe 24 Sei Φ ein Wurzelsystem mit Weyl Gruppe W. Zeigen Sie, daß W eine normale Untergruppe von $Aut(\Phi)$ ist.