Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 09 28. April 2009

Lie Algebren

2. Übung

Aufgabe 10 Sei G eine endlichdimensionale Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und $\psi : G \to gl(V)$ eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung. Zeigen Sie, daß die einzigen Endomorphismen von V, die mit allen $\psi(x)$ kommutieren, die Skalare sind.

Aufgabe 11 Sei G eine endlichdimensionale Lie Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 und $\psi : G \to gl(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung. Die Bilinearform

$$K_\psi(x, y) = \operatorname{tr}(\psi(x)\psi(y))$$

wir als Spurform von ψ auf G bezeichnet. Zeigen Sie:

a) $K_\psi(x, y) = K_\psi(y, x)$

b) $K_\psi([x, y], z) = K_\psi(x, [y, z])$

c) $\operatorname{rad}(K_\psi)$ ist ein Ideal in G.

d) $\psi(\operatorname{rad}(K_\psi)) \subset \operatorname{rad}(\psi(G))$

e) Ist G halbeinfach und ψ injektiv, so ist K_ψ nicht ausgeartet.

Aufgabe 12 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 und $\psi : G \to gl(V)$ eine endlichdimensionale injektive Darstellung.

a) Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von G. Zeigen Sie, daß es eine eindeutige Basis $\{y_1, \dots, y_n\}$ von G mit $K_\psi(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ gibt. Diese Basis wird als duale Basis von $\{x_1, \dots, x_n\}$ bezüglich K_ψ bezeichnet.

b) Der Casimir Operator von ψ ist definiert als

$$\Omega_\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\psi(y_i)\,.$$

Beweisen Sie, daß Ω_ψ nicht von der Wahl der Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ abhängt.

c) Zeigen Sie, daß

$$[\Omega_\psi, \psi(x)] = 0$$

für alle $x \in G$ und

$$\operatorname{tr}(\Omega_\psi) = \dim G\,.$$

Aufgabe 13 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra. Beweisen Sie, daß G trivial auf jedem 1-dimensionalen Modul operiert.

Aufgabe 14 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei V ein endlichdimensionaler G-Modul und $W \subset V$ ein irreduzibler Untermodul mit Kodimension 1. Zeigen Sie, daß W ein Komplement in V hat.

Aufgabe 15 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei V ein endlichdimensionaler G-Modul und $W \subset V$ ein Untermodul mit Kodimension 1. Beweisen Sie, daß W ein Komplement in V hat.

Aufgabe 16 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei V ein endlichdimensionaler G-Modul und $W \subset V$ ein Untermodul. Zeigen Sie, daß W ein Komplement in V hat.

Aufgabe 17 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und V ein endlichdimensionaler G-Modul. Zeigen Sie, daß V vollständig reduzibel ist.