Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 09 21. April 2009

Lie Algebren

1. Übung

Aufgabe 1 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform $(\, , \,)$. Zeigen Sie, daß $o(V)$ eine Unteralgebra von $gl(V)$ ist.

Aufgabe 2 Seien G und L Lie Algebren und $f : G \to L$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, daß das Urbild eines Ideals in L ein Ideal in G ist.

Aufgabe 3 Sei G eine Lie Algebra. Zeigen Sie, daß das Zentrum $Z(G)$ ein Ideal in G ist.

Aufgabe 4 Formulieren Sie die Homomorphiesätze für Lie Algebren.

Aufgabe 5 Beweisen Sie die Sätze über nilpotente und auflösbare Lie Algebren in den Abschnitten 1.3 und 1.4 der Vorlesung.

Aufgabe 6 Sei G eine endlichdimensionale Lie Algebra. Zeigen Sie, daß G genau dann nilpotent ist, wenn $ad(x)$ für alle $x \in G$ nilpotent ist.

Aufgabe 7 Sei G eine endlichdimensionale Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Zeigen Sie, daß G genau dann auflösbar ist, wenn $[G, G]$ nilpotent ist.

Aufgabe 8 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra. Beweisen Sie, daß die Zerlegung von G in einfache Ideale bis auf Reihenfolge eindeutig ist.

Aufgabe 9 Sei G eine halbeinfache Lie Algebra. Zeigen Sie, daß jede Derivation auf G innere Derivation ist.