9. Darstellungstheorie

In diesem Kapitel ist G eine halbeinfache Lie Alg über $\mathbb{C}$ mit Cartan Unteralg H und Wurzelsystem Φ.

$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ist eine Basis von Φ.

Für $\alpha \in \Phi$ bezeichne h_α das eindeutige Element im Urbild von α unter $H \longrightarrow H^*$, $h \longmapsto (h, \ )$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Für $\alpha \in \Phi^+$ wähle $x_\alpha \in G_\alpha$, $y_\alpha \in G_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Ist $\alpha = \alpha_i$ so schreiben wir x_i, h_i, y_i für x_{α_i}, h_{α_i}, y_{α_i}.

Wir setzen $N^+ = \bigoplus_{\alpha > 0} G_\alpha$, $N^- = \bigoplus_{\alpha < 0} G_\alpha$

und $B = H \oplus N^+$

9.1 Gewichte

Sei V ein G-Modul und $\mu \in H^*$.

Def

$$V_\mu = \{ v \in V \mid hv = \mu(h) v \quad \forall_{h \in H} \}$$

Ein Element aus V_μ hat Gewicht μ.

$\dim V_\mu$ heißt Multiplizität von μ. Ist $V_\mu \neq 0$ so heißt μ Gewicht von V.

Satz

Sei V ein G-Modul

1) Sei $\mu \in H^*$, $\alpha \in \Phi$. Dann $G_\alpha V_\mu \subset V_{\alpha+\mu}$

2) Die Summe $V' = \sum_{\mu \in H^*} V_\mu$ ist direkt und V' ist ein Untermodul von V. Ist $\dim V < \infty$ so ist $V' = V$.

9.2 Höchstgewichtsvektoren

Sei V ein G-Modul $v \in V \setminus \{0\}$ heißt Höchstgewichtsvektor mit Gew λ, wenn

1) v hat Gew λ

2) $N^+ v = 0$

Satz

Sei $V \neq 0$ ein endlichdim G-Modul. Dann hat V einen Höchstgewichtsvektor

Bew

Die Unteralg $B = H \oplus N^+$ ist auflösb. Nach dem Th von Lie hat B einen Eigenvektor v in V. Sei $v \in V_\lambda$, $\lambda \in H^*$. Dann

$$0 = [h, x_\alpha] v = \alpha(h) v = 0 \quad \forall_{h \in H}$$

Also $x_\alpha v = 0 \quad (\alpha > 0)$

Satz

Sei V ein G-Modul und $v \in V$ ein Höchstgewichtsvektor mit Gew λ. Sei W der Untermodul erzeugt von v. Dann

1) Seien $\beta_1, \dots, \beta_k$ die verschiedenen positiven Wurzeln. Dann wird W als Vektorraum erzeugt von

$$y_{\beta_1}^{m_1} \quad y_{\beta_k}^{m_k} \, v$$

$m_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \geq 0$.

2) Die Gew von W sind der Form

$$\lambda - \sum_{i=1}^{e} n_i \alpha_i \quad , \; n_i \in \mathbb{Z} \, , \; n_i \geq 0$$

Sie haben endl. Mult.

3) λ hat Mult 1

4) W ist unzerlegbar.

Bew

1) Es ist $G = N^- \oplus B$ mit $B = H \oplus N^+$, so daß

$$U(G) = U(N^-)\, U(B)$$

Es folgt

$$W = U(G)v = U(N^-) \underbrace{U(B)v}_{= \mathbb{C}v}$$

$$= U(N^-)v$$

Nach dem Poincaré-Birkhoff-Witt Th ist

$$y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_k}^{m_k}$$

eine Basis von $U(N^-)$. Damit folgt 1)

2) folgt aus 9.1.

3) $\lambda - \sum n_i \alpha_i$ kann nur gleich λ sein, wenn alle $n_i = 0$ sind.

4) Sei $W = W_1 \oplus W_2$ eine Zerlegung von W in Untermoduln. Sei $v = v_1 + v_2$ mit $v_i \in W_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} hv &= hv_1 + hv_2 \\ &= \lambda(h)v = \lambda(h)v_1 + \lambda(h)v_2 \end{aligned}$$

d.h. $v_i \in W_i \cap W_\lambda$. Aus $\dim W_\lambda = 1$ folgt $v_1 = v$, $v_2 = 0$ oder $v_1 = 0$, $v_2 = v$. Im ersten Fall ist $W_1 = W$ und im zweiten $W_2 = W$.

$\square$

// 18.5.09

9.3 Irreduzible Moduln mit einem höchsten Gewicht

Satz

Sei V ein irred G-Modul mit einem Höchstgewichtsvektor v vom Gew λ. Dann

1) v ist der einzige Höchstgewichtsvektor in V (bis auf skalare Vielfache). Das Gew λ heißt das höchste Gewicht von V

2) Die Gewichte μ von V sind der Form

$$\mu = \lambda - \sum m_i \alpha_i$$

mit $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \geq 0$.

Sie haben endl. Mult. Insbes. hat λ Mult 1. Es ist $V = \bigoplus V_\mu$

Bew

2) folgt aus dem letzten Satz.

1) Sei v' ein weiterer Höchstgewichtsvektor mit Gew λ'. Dann ist

$$\lambda' = \lambda - \sum m_i \alpha_i$$

$m_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \geq 0$.

Vertauscht man die Rollen von v und v' so folgt

$$\lambda = \lambda' - \sum m_i' \alpha_i$$

$m_i' \in \mathbb{Z}$, $m_i' \geq 0$

Das impliziert $m_i + m_i' = 0$ und somit $m_i = m_i' = 0$, d.h. $\lambda = \lambda'$. Folglich sind v und v' prop.

$\square$

<u>Satz</u>

Sei V_1, V_2 irred G-Moduln mit höchsten Gew λ_1, λ_2.

V_1 und V_2 sind genau dann isomorph wenn $\lambda_1 = \lambda_2$

<u>Bew</u>

Es reicht z.z. daß $\lambda_1 = \lambda_2$ die Isom von V_1 und V_2 impliziert.

Seien v_1, v_2 Höchstgewichtsvektoren

von V_1 und V_2 mit Gew $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Def $V = V_1 \oplus V_2$. Dann ist $v = v_1 + v_2$ ein Höchstgewichtsvektor von V mit Gew λ. Sei W der Untermod von V erz von v. Die Proj $V \longrightarrow V_2$ liefert einen Modulhom $f_2 : W \longrightarrow V_2$. Wegen $f(v) = v_2$ ist f surj. Der Kern $N_2 = W \cap V_1$ ist ein Untermodul von V_1. N_2 enthält nicht v_1 (Die einzigen Elemente in W vom Gew λ sind die Vielfachen von v.) Also ist $N_2 \neq V_1$. Da V_1 irred ist, folgt $N_2 = 0$. Also ist

$f_2 : W \longrightarrow V_2$ ein Isom Analog zeigt man, daß V_1 isom zu W ist.

$\square$

<u>Theorem</u>

Zu jedem $\lambda \in H^*$ gibt es einen eind irred G-Modul mit höchstem Gewicht λ.

<u>Bew</u>

Die Eindeutigkeit folgt aus dem letzten Satz

Wir beweisen die Existenz

Wir def einen 1-dim B-Modul $D_\lambda = \mathbb{C} v_\lambda$ durch

$$h.v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \qquad \forall\, h \in H$$

$$N^+.v_\lambda = 0$$

Sei $U(G)$ die universelle Einhüllende von G und $U(B)$ die von $B = H \oplus N^+$. Wir def den Modul

$$M(\lambda) = U(G) \otimes_{U(B)} D_\lambda$$

$$= U(G) \otimes_{\mathbb{C}} D_\lambda \Big/ \langle xb \otimes w - x \otimes bw \mid x \in U(G),\ b \in U(B),\ w \in D_\lambda \rangle$$

Dann ist $M(\lambda)$ ein $U(G)$-Modul unter Linksmultiplikation.

Das Element $v = 1 \otimes v_\lambda$ ist $\neq 0$ in $M(\lambda)$ und erzeugt $M(\lambda)$ als $U(G)$-Modul.

Die Elemente

$$y_{\beta_1}^{m_1} \cdots y_{\beta_k}^{m_k} v$$

bilden eine Basis von $M(\lambda)$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
hv &= h(1 \otimes v_\lambda) = h \otimes v_\lambda \\
&= 1 \otimes h v_\lambda = 1 \otimes \lambda(h) v_\lambda \\
&= \lambda(h)(1 \otimes v_\lambda) \\
&= \lambda(h) v
\end{aligned}
$$

und

$$x.v = x(1 \otimes v_\lambda) = x \otimes v_\lambda = 0$$

Somit ist v ein Höchstgewichts-vektor mit Gewicht λ

$M(\lambda)$ ist unzerlegbar, hat aber einen max echten Untermod $I(\lambda)$. Der Quotient $L(\lambda) = M(\lambda)/I(\lambda)$ ist somit irred.

□

9.4 Endlichdim Moduln

Satz

Sei $V \neq 0$ ein endlichdim G-Modul. Dann gilt

1) $V = \bigoplus_{\mu \in H^*} V_\mu$

2) Ist μ ein Gewicht von V, so ist $\mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Phi$

3) V enthält einen Höchstgewichtsvektor.

4) Wird V von einem Höchstgewichtsvektor erzeugt, so ist V irred.

<u>Bew</u>

1), 3) haben wir bereits bewiesen

2) Sei $S_\alpha = G_\alpha \oplus H_\alpha \oplus G_{-\alpha}$.

Dann ist S_α isom zu $sl_2(\mathbb{C})$.

Die Eigenwerte von h_α auf V

sind nach 4.5 ganzzahlig.

Also sind die $\mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

4) V ist vollständig reduzibel, d.h. zerfällt in eine Summe $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ irred Untermod. Andererseits ist V aber auch unzerlegbar. Folglich ist $V = V_i$ für ein i.

$\square$

<u>Bem</u>

Ein irred G-Modul ist unzerlegbar. Die Umkehrung ist falsch.

Theorem

Sei $\lambda \in H^*$ und $L(\lambda)$ der irred G-Modul mit höchstem Gew λ.

Dann:

$L(\lambda)$ ist genau dann endlich dim wenn $\lambda(h_i)$ ganzzahlig und ≥ 0 für alle $i = 1, \dots, e$.

Bew

Wir zeigen nur „$\Rightarrow$".

Da $L(\lambda)$ endlich dim ist hat $L(\lambda)$ ein Höchstgewichtsvektor v. Dieser erzeugt $L(\lambda)$, weil $L(\lambda)$ irred ist.

$S_{\alpha_i} = G_{\alpha_i} \oplus H_{\alpha_i} \oplus G_{-\alpha_i}$ ist eine Unteralg isom zu $sl_2(\mathbb{C})$ und V ist somit ein $sl_2(\mathbb{C})$-Modul. v ist auch ein Höchstgewichtsvektor für S_{α_i} und hat somit ganzzahliges Gew ≥ 0 (vgl. 4.3). Also ist $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}$ und $\lambda(h_i) \geq 0$.

$\square$

<u>Satz</u>

Sei V ein endlich dim irred G-Modul. Dann ist die Menge der Gewichte von V inv unter W

und $\mathrm{mult}(\mu) = \mathrm{mult}(w\mu)$

für alle $w \in W$.

Die Elemente $h_1, \dots, h_\ell$ bilden eine Basis von H. Die Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ in H^* mit

$$\lambda_i(h_j) = \delta_{ij}$$

bilden die duale Basis. Sie werden als <u>fundamentale Gewichte</u> bezeichnet und die irred Darst $L(\lambda_i)$ als <u>Fundamentaldarst</u>

9.5 Charaktere

Sei

$$\Lambda = \{ \mu \in H^* \mid \mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \quad \forall_{\alpha \in \Phi} \}$$

$$= \{ \mu \in H^* \mid \mu(h_i) \in \mathbb{Z} \quad \forall_{i=1,\dots,\ell} \}$$

Dann ist

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z} \lambda_i$$

Λ wird als Gewichtsgitter bez.

Λ ist invariant unter W.

Wir def den Gruppenring $\mathbb{Z}[\Lambda]$ von Λ über $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}[\Lambda]$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit

Basis $\{e^\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ und Produkt def durch $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.

W operiert auf $\mathbb{Z}[\Lambda]$ durch $w(e^\mu) = e^{w\mu}$

Sei V ein endlich dim G-Modul. Nach 9.4 liegen die Gewichte von V in Λ. Der <u>Charakter</u> von V ist def als

$$ch(V) = \sum_{\mu \in H^*} (\dim V_\mu)\, e^\mu$$

$$= \sum_{\mu \in \Lambda} \text{mult}(\mu)\, e^\mu$$

$$\in \mathbb{Z}[\Lambda]$$

Theorem

Seien V, V' endlich dim G-Moduln.

Dann

1) $ch(V)$ ist invariant unter W

2) $ch(V \oplus V') = ch(V) + ch(V')$

3) $ch(V \otimes V') = ch(V)\, ch(V')$

4) V und V' sind genau dann isom wenn $ch(V) = ch(V')$

Bew

1) Sei P die Menge der Gewichte von V. Sei $w \in W$. Dann ist $wP = P$ und $\mathrm{mult}(w\mu) = \mathrm{mult}(\mu)$ für $\mu \in P$. Es folgt

$$w(\mathrm{ch}(V)) = \sum_{\mu \in P} \mathrm{mult}(\mu)\, e^{w\mu}$$

$$= \sum_{\mu \in P} \mathrm{mult}(w\mu)\, e^{w\mu}$$

$$= \mathrm{ch}(V).$$

// 20.5.09

2) ist klar.

3) Sei $V = \bigoplus_\mu V_\mu$, $V' = \bigoplus_\nu V_\nu$. Dann ist

$$V \otimes V' = \left(\bigoplus_\mu V_\mu\right) \otimes \left(\bigoplus_\nu V'_\nu\right)$$

$$= \bigoplus_{\mu,\nu} \left(V_\mu \otimes V_\nu\right)$$

Sei $W = V \otimes V'$. Dann zerfällt

$$W = \bigoplus_\gamma W_\gamma$$

$x \in W_\gamma \setminus \{0\}$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$x = \sum_{\mu,\nu} \underbrace{v_\mu \otimes v_\nu'}_{\text{lin unabh}}$$

Für $h \in H$ ist

$$hx = \sum h(v_\mu \otimes v_\nu')$$

$$= \sum \left(hv_\mu \otimes v_\nu' + v_\mu \otimes hv_\nu'\right)$$

$$= \sum (\mu+\nu)(h)\; v_\mu \otimes v_\nu'$$

Andererseits gilt

$$hx = \gamma(h)\, x$$

$$= \sum \gamma(h)\, v_\mu \otimes v_\nu'$$

Also $\gamma = \mu + \nu$

d.h.

$$W_\gamma \subset \bigoplus_{\mu+\nu=\gamma} V_\mu \otimes V_\nu$$

Also

$$W_\gamma = \bigoplus_{\mu+\nu=\gamma} V_\mu \otimes V_\nu'$$

Damit

$$\begin{aligned}
ch(W) &= \sum_\gamma (\dim W_\gamma)\, e^\gamma \\
&= \sum_\gamma \Big(\sum_{\mu+\nu=\gamma} \dim V_\mu \dim V_\nu' \Big) e^\gamma \\
&= \sum_{\mu,\nu} \dim V_\mu \dim V_\nu'\, e^\mu e^\nu \\
&= ch(V)\, ch(V')
\end{aligned}$$

4) Durch Induktion über $\dim V$

Falls $\dim V = 0$ so ist $d_1(V) = 0$ und somit $V' = 0$.

Sei nun $\dim V > 0$. Sei P die Menge der Gewichte von V. Dann ist P auch die Menge der Gewichte von V', weil $d_1(V) = d_1(V')$. Es ist $P \neq \emptyset$.

Da P <u>endlich</u> ist, gibt es ein $\lambda \in P$ so daß $\lambda + \alpha_i \notin P$ für alle i.

(Sonst wähle $\lambda_0 \in P$. Dann ist

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_{i_0} \in P$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_{i_1} \in P$$

usw

d.h. P wäre unendlich.)

Sei $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$. Dann ist v ein Höchstgewichtsvektor mit Gew λ. Sei V_1 der Untermodul von V erz von v. Dann ist V_1 irred und $V = V_1 \oplus V_2$ für einen geeigneten Untermodul V_2. Dasselbe Arg angewendet auf V' liefert eine Zerlegung $V' = V_1' \oplus V_2'$ wobei V_1' ein irred Modul mit höchstem Gew λ ist. V_1 und V_1' sind isom und haben somit denselben Char. Also haben auch V_2 und V_2' denselben Char

Nach Induktionshyp sind V_2 und V_2' isom. Also sind auch V und V' isom

$\square$

Sei

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z} \lambda_i$$

das Gewichtsgitter. Dann liegt

$$\Lambda^+ = \{ \mu \in \Lambda \mid \mu(h_i) \geq 0 \quad \forall_i \}$$

im Abschluss der fund Weyl Kammer (Kammer zu Δ).

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$$

ist der Weyl Vektor.

<u>Lemma</u>

$$\rho = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$$

Insbesondere ist ρ in der fund Weyl Kammer.

<u>Bew</u>

Wir haben bereits gesehen, daß

$$\sigma_{\alpha_i}(\rho) = \rho - \alpha_i$$

Es folgt $\langle \rho, \alpha_i \rangle = 1$.

Wir können ρ schreiben als

$\rho = \sum m_j \lambda_j$, so daß

$$\langle \rho, \alpha_i \rangle = \sum m_j \langle \lambda_j, \alpha_i \rangle = m_i$$

$\square$

⊛ $\mathbb{Z}[\Lambda]$ ist ein Integritätsbereich. Folglich ist der Quotient eindeutig.

Theorem

Sei V ein endlich dim irred Mod mit höchstem Gewicht λ. Dann ist

$$d_1(V) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha>0} (1-e^{-\alpha})}$$ ⊛

Falls $\lambda = 0$, so ist $d_1(V) = 1$ und wir erhalten die Nenner id

$$e^{\rho} \prod_{\alpha>0} (1-e^{-\alpha}) = \sum_{w \in D} \det(w)\, e^{w(\rho)}$$

$$=: D$$

Korollar

Sei V ein endlich dim irred Modul mit höchstem Gew λ. Dann

$$\dim V = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

<u>Bew</u>

Wegen

$$\mathrm{ch}(V) = \sum (\dim V_\mu)\, e^\mu$$

ist dim V das Bild des char unter dem Hom

$$\mathbb{Z}[\Lambda] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $e^\mu \longrightarrow 1$. Leider verschwindet der Nenner der Weylschen Charakterformel unter dieser Sub.

Wir lösen das Problem indem wir die Abb durch den Ring der

Potenzreihen faktorisieren

$$\mathbb{Z}[\Lambda] \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[[t]] \xrightarrow{\xi} \mathbb{C}$$

ψ ist def durch $e^{\mu} \mapsto e^{(\mu,\delta)t}$

und ξ durch $\xi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = a_0$

Für $\mu \in \Lambda$ def

$$\psi_\mu : \mathbb{Z}[\Lambda] \longrightarrow \mathbb{C}[[t]]$$
$$e^{\alpha} \longmapsto e^{(\mu,\alpha)t}$$

und

$$A_\mu = \sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w\mu}$$

Dann ist

$$\psi_\mu(A_\nu) = \sum_{w \in W} \det(w)\, e^{(w\nu,\mu)t}$$

$$= \sum_{w \in W} \det(w^{-1})\, e^{(\nu, w^{-1}\mu)t}$$

$$= \psi_\nu(A_\mu)$$

Aus der Nennerid folgt

$$A_\rho = e^\rho \prod_{\alpha>0} (1 - e^{-\alpha})$$

$$= \prod_{\alpha>0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$$

Sei K die Anzahl der pos. Wurzeln

Def $\psi = \psi_\rho$. Dann

$$\psi(A_\mu) = \psi_\mu(A_\rho)$$

$$= \psi_\mu\Big(\prod_{\alpha>0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})\Big)$$

$$= \prod_{\alpha>0} \Big(e^{(\mu,\alpha)t/2} - e^{-(\mu,\alpha)t/2}\Big)$$

$$= \prod_{\alpha>0} \left((\mu,\alpha) t + \text{Terme höherer Ordnung} \right)$$

$$= \left(\prod_{\alpha>0} (\mu,\alpha) \right) t^K + \text{Terme höherer Ordnung}$$

Aus der Weylschen Charakterformel folgt

$$A_\varsigma \, ch(V) = A_{\lambda+\varsigma}$$

so daß

$$\varphi(A_\varsigma)\, \varphi(ch(V)) = \varphi(A_{\lambda+\varsigma})$$

d.h.

$$\left\{ \left(\prod_{\alpha>0} (\varsigma,\alpha) \right) t^K + \text{höhere Ord} \right\}$$

$$\times \left\{ \dim V + \text{höhere Ord} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\prod_{\alpha>0} (\delta+\lambda, \alpha) \right) t^K + \text{höh Ord} \right\}$$

Division durch t^K und Anwendung von ξ bzw $t \to 0$ liefert

$$\dim V = \prod_{\alpha>0} \frac{(\delta+\lambda, \alpha)}{(\delta, \alpha)}$$

$\square$

<u>Lemma</u>

Seien $\mu, \nu \in \Lambda^+$ und $w \in W$ so daß $w(\mu+\delta) = \nu+\delta$. Dann ist $w=1$ und $\mu=\nu$

<u>Bew</u>

W operiert einfach transitiv auf

den Weyl Kammern.

□

<u>Satz</u>

Sei V ein endlich dim G-Modul und $n(\lambda)$ die Multiplizität mit der $L(\lambda)$ in der Zerlegung von V in irred Modul erscheint.

Dann ist $n(\lambda)$ gleich dem Koeff von $e^{\lambda+\rho}$ in $D\, ch(V)$.

<u>Bew</u>

Es ist

$$ch(V) = \sum_{\lambda} n(\lambda)\, ch(L(\lambda))$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{\lambda} \sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\lambda+\rho)}$$

Die Beh folgt nun aus dem letzten Lemma.

$\square$

<u>Beispiele</u>

1) Sei $G = sl_2(\mathbb{C})$. Dann ist $\Phi = \{\pm\alpha\}$, $\Delta = \{\alpha\}$, $W = \{1, \sigma_\alpha\}$ und $\rho = \frac{1}{2}\alpha$. Wir normieren die Bilinearform so daß $\alpha^2 = 2$. Dann ist ρ das fundamentale Gewicht.

Sei V ein irred G-Modul mit höchstem Gew $\lambda = n\rho$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Dann ist

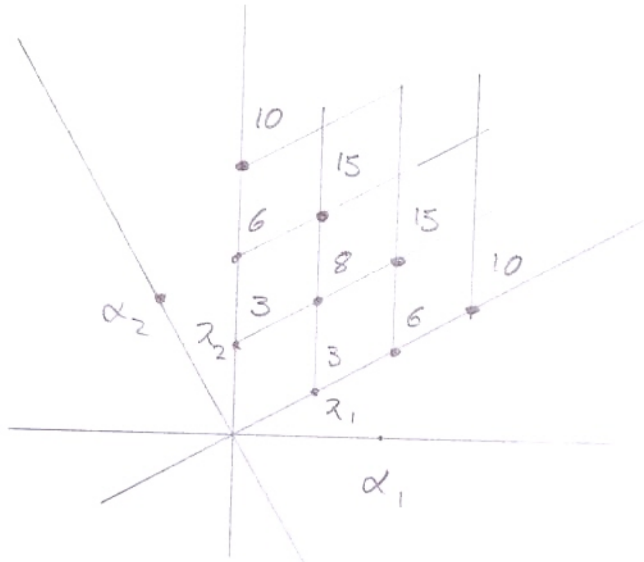
$$ch(V) = \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \det(w)\, w\left(e^{\lambda+\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left(e^{(n+1)\rho} - e^{-(n+1)\rho}\right)$$

$$= \frac{e^{(n+1)\rho} - e^{-(n+1)\rho}}{e^{\rho} - e^{-\rho}}$$

$$= e^{n\rho} + e^{(n-2)\rho} + \dots + e^{-n\rho}$$

2) Sei $G = sl_3(\mathbb{C})$. Dann sind die Dimensionen der kleinsten endlich dim irred Darst gegeben durch



. (Normierung $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 2$)