8. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

In diesem Kapitel ist der Grundkörper $\mathbb{C}$.

8.1 Serres Theorem

Theorem

Sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_e\}$. Def $a_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ Sei G die Lie Alg mit Erzeugenden $\{x_i, h_i, y_i \mid i = 1, \dots, e\}$ und Relationen

1) $[h_i h_j] = 0$

2) $[x_i y_j] = \delta_{ij} h_i$

3) $[h_i x_j] = a_{ij} x_j \qquad [h_i y_j] = -a_{ij} y_j$

4) $ad(x_i)^{1-a_{ij}} x_j = ad(y_i)^{1-a_{ij}} y_j = 0$

für $i \neq j$

Dann ist G eine endlich dim halbeinfache Lie Alg mit Cartan-Unteralg erzeugt von den h_i und Wurzelsystem Φ.

8.2 Eindeutigkeit

Theorem

Seien G, G' halbeinfache Lie Alg mit Cartan Unteralg H, H' und

Wurzelsystemen Φ und Φ'. Sei $\Theta : \Phi \longrightarrow \Phi'$ ein Isom der eine gegebene Basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ in eine Basis $\Delta' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_l'\}$ mit $\alpha_i' = \Theta(\alpha_i)$ abbildet. Sei $\Theta : H \longrightarrow H'$ die Fortsetzung von Θ nach H. Für jedes α_i wähle ein beliebiges $x_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{0\}$ und ein beliebiges $x_i' \in G'_{\alpha_i'} \setminus \{0\}$.

Dann gibt es einen eindeutigen Isom $\Theta : G \longrightarrow G'$ der $\Theta : H \longrightarrow H'$ fortsetzt und x_i nach x_i' abb.

Bew

Sei y_i das eindeutige Element in $G_{-\alpha_i}$, so daß $[x_i, y_i] = h_i$ und y_i' das eindeutige Element in $G_{-\alpha_i'}$ so daß $[x_i', y_i'] = h_i'$.

Existiert die angegebene Fortsetzung so bildet diese notwendig y_i in y_i' ab und ist eindeutig weil $\{x_i, h_i, y_i \mid i = 1, \dots, e\}$ G erzeugt.

Die kanonische Abb $\{x_i, h_i, y_i \mid i = 1, \dots, e\} \longrightarrow \{x_i', h_i', y_i' \mid i = 1, \dots, e\}$ liefert einen eind. Hom von de

freien Lie Alg erzeugt von
$\{x_i, h_i, y_i \mid i = 1, \ldots, \ell\}$ in G'.

Diese Abb faktorisiert durch G.

(Genauer durch eine isom Kopie von G. Hier geht Serres Th ein.)

Es gibt also einen surj Hom von G nach G'. Wegen

$$\begin{aligned} \dim G &= \dim H + |\Phi| \\ &= \dim H' + |\Phi'| \\ &= \dim G' \end{aligned}$$

ist diese Abb ein Isom.

$\square$

Satz

Sei G halbeinfach. Dann ist G genau dann einfach, wenn sein Wurzelsystem irred ist.

8.3 Die klassischen Lie Alg

Die Lie Alg $sl_{n+1}(\mathbb{C})$, $n \geq 1$ sind einfach und haben Wurzelsystem A_n.

Sei $(,)$ eine nichtausg. sym Bilinearform auf $\mathbb{C}^n$. Die komplexen $n \times n$-Matrizen mit $X = -X^T$ bzgl dieser Bilinearbilden eine Lie Alg. Diese ist unabh. von der speziellen Wahl der Bilinearform und wird mit $so_n(\mathbb{C})$ bez.

$so_n(\mathbb{C})$ ist einfach für $n \geq 3$.

Die Lie Alg $so_{2n+1}(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ haben Wurzelsystem B_n.

Die Lie Alg $so_{2n}(\mathbb{C})$, $n \geq 4$ haben Wurzelsystem D_n.

Die analoge Konst mit einer nicht ausg symplektischen Bilinear-form auf $\mathbb{C}^{2n}$ liefert die Lie Alg

$sp_{2n}(\mathbb{C})$ Diese ist einfach für $n \geq 1$. $sp_{2n}(\mathbb{C})$ hat Wurzel-system C_n für $n \geq 3$.