7. Die universelle Einhüllende

In diesem Kapitel verstehen wir unter einer Algebra eine assoziative Algebra mit 1. Eine Unteralg enthält die 1 und Homomorphismen bilden die 1 auf die 1 ab

7.1 Definition

Sei A eine Alg. Dann ist A eine Lie Alg unter

$$[x, y] = xy - yx.$$

Wir bez diese Lie Alg mit A_L.

Sei L eine Lie Alg.

Ein Paar (U, i) bestehend aus einer Alg U und einem Hom i von L in U_L (i.e. $i([xy]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$ für alle $x, y \in L$) heißt <u>universelle Einhüllende</u> von L wenn gilt:

Sei A eine Alg und $j : L \longrightarrow A_L$ ein Hom. Dann gibt es einen <u>eindeutigen</u> Hom $\theta : U \longrightarrow A$, so daß das folgende Diag kommutiert

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & A \\ U \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Satz

Seien (U,i), (V,j) universelle Einhüllende von L. Dann gibt es einen eindeutigen Isom θ mit $\theta i = j$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & V \\ U \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Bew

Es gibt einen eindeutigen Hom θ

so daß das folgende Diag kommutiert

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & V \\ U \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Es gibt einen eindeutigen Hom η so daß

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "\eta"'] & L \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"] & V \\ & U \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Also

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & V \\ V \arrow[ur, "\theta\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Es folgt $\theta\eta = 1_V$.

Entsprechend

$$\begin{tikzcd}
U & \\
L \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[ul, "\mu"'] \\
U \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad (\mu = \eta)$$

Also

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & U \\
U \arrow[ur, "\mu\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

und $\mu\theta = 1_U$.

Also ist θ ein Isom.

$\square$

Satz

Sei (U, i) eine universelle Einhüllende von L. Dann wird U von $i(L)$ erzeugt

Bew

Sei A die Unteralg von U erzeugt von $i(L)$ Dann ist $i : L \to A_L$ ein Hom und es gibt einen Hom θ so daß

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A \\ U \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Sei $j : A \to U$ die natürliche Einbettung. Dann ist $j(A) = A$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, "j"] & U \\ U \arrow[ur, "\theta"'] & & \end{tikzcd}$$

Es folgt

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "ji = i"] \arrow[d, "i"'] & U \\ U \arrow[ur, "j\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeit folgt

$$j\theta = 1_U$$

Damit

$$u = 1_u u = j \underbrace{\Theta u}_{\subseteq A} \subseteq j(A) = A .$$

$\square$

Sei V ein Vektorraum über K.
Die <u>Tensoralg</u> von V ist def als

$$T(V) = K1 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$$

mit

$$V_n = V \otimes \dots \otimes V$$

(n Faktoren). Die Multiplikation in $T(V)$ ist gegeben durch

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m)$$

$$= v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m$$

Ist A eine Alg und $\phi : V \longrightarrow A$ linear, so gibt es einen <u>eindeutigen</u> Hom $\theta : T(V) \longrightarrow A$ so daß das folgende Diag kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & A \\ T(V) \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Sei I das (zweiseitige) Ideal

in $T(L)$ erzeugt von

$$[xy] - x \otimes y + y \otimes x \quad ,$$

$x, y \in L$. Def $U = T(L)/_I$ und

sei $i : L \longrightarrow U$ die natürliche

Projektion. Dann gilt

$$\begin{aligned} i([x,y]) &= [xy] + I \\ &= x \otimes y - y \otimes x + I \\ &= i(x) \otimes i(y) - i(y) \otimes i(x) \end{aligned}$$

für alle $x, y \in L$, d.h. $i : L \to U_L$

ist ein Hom

Satz

(U, i) ist eine universelle Einhüllende von L

<u>Bew</u>

Sei $j : L \to A$ eine lin Abb mit

$$j([x,y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$$

für alle $x,y \in L$. Dann faktorisiert j durch $T(L)$, d.h.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d] & A \\ T(L) \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

für ein eindeutiges α.

Für $x,y \in L$ ist

$$\alpha([xy] - x\otimes y + y\otimes x)$$
$$= \alpha([xy]) - \alpha(x)\alpha(y) + \alpha(y)\alpha(x)$$
$$= j([xy]) - j(x)j(y) + j(y)j(x)$$
$$= 0$$

d.h. $I \subset Ker(\alpha)$.

Es gibt also einen eindeutigen Hom Θ mit

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d] & A \\ T(L) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] & T(L)/_I \arrow[u, "\Theta"'] \end{tikzcd}$$

Wir haben also

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & A \\ U \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit von θ folgt daraus, daß $i(L)$ die Alg $U = T(L)/_I$ erzeugt

(Für $x \in L$ ist $\theta(i(x)) = j(x)$, d.h. θ ist auf den Erzeugern von U festgelegt.)

□

Sei A eine Algebra. Eine <u>Darst</u> von A ist ein Hom

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

Satz

Sei L eine Lie Alg und (U, i) eine universelle Einhüllende von L. Es gibt eine bijektive Korrespondenz zwischen Darst

$$\varphi : L \longrightarrow gl(V) \qquad (= End(V)_L)$$

und Darst

$$\rho : U \longrightarrow End(V)$$

Für entsprechende Darst gilt

$$\rho(i(x)) = \varphi(x)$$

Bew

Sei $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ eine Darst von L. Dann

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{End}(V) \\ U \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Die Abb ρ ist ein Hom

Sei andersherum $\rho : U \longrightarrow \mathrm{End}(V)$

eine Darst von U

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U \arrow[r, "\rho"'] & \mathrm{End}(V) \end{tikzcd}$$

Def

$$\varphi(x) = \rho(i(x))$$

Dann ist

$$\varphi([xy]) = f(i[x,y])$$
$$= f(i(x)i(y) - i(y)i(x))$$
$$= f(i(x))\, f(i(y)) - f(i(y))\, f(i(x))$$
$$= \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$$

Es ist klar, daß die angegebenen Abb invers zueinander sind

□

7.2 Das Poincaré - Birkhoff - Witt Theorem

Theorem

Sei L eine Lie Alg und $\{x_j \mid j \in J\}$ eine geordnete Basis von L. Sei (U, i) eine universelle Einhüllende von L. Def $y_j = i(x_j)$. Dann bilden die Elemente

$$1, \quad y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_n}$$

$$j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_n$$

eine Basis von U

Korollar

Die Abb $i : L \to U$ ist injektiv.

Aus diesem Grund kann man die y_j mit den x_j ident.

Korollar

$i(L)$ ist eine Unteralg von U_L isomorph zu L.

7.3 Die freie Lie Alg

Sei $X = \{x_j \mid j \in J\}$ eine Menge. Die freie Lie Alg erzeugt von X ist ein Paar (FL, i) bestehend aus einer Lie Alg FL und einer Abb $i: X \longrightarrow FL$, so daß es für jede

Abb f von X in eine Lie Alg L einen eindeutigen Hom θ gibt, so daß das folgende Diag kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & L \\ FL \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

FL ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Sei V ein Vektorraum mit Basis X und $T(V)$ die Tensor-alg von V. Sei FL die Unteralg von $T(V)_L$ erzeugt von X und

$i : X \longrightarrow FL$ die natürliche

Einbettung.

<u>Satz</u>

(FL, i) ist eine freie Lie Alg

über X.

<u>Bew</u>

Sei L eine Lie Alg und

$$X \xrightarrow{f} L$$

eine Abb. Sei (U, σ) eine univ

Einhüllende von L. Die Abb

$$X \xrightarrow{f} L \xrightarrow{\sigma} U$$

läßt sich eindeutig fortsetzen

zu einer Abb

$$V \longrightarrow U$$

(mit Bild in $\sigma(L)$)

und zu einem Hom

$$T(V) \xrightarrow{\phi} U$$

(aufgrund der universellen Eig von $T(V)$). ϕ ist auch ein Hom von $T(V)_L$ nach U_L. Es ist $\phi(X) \subset \sigma(L)$. Somit ist $\phi^{-1}(\sigma(L))$ eine Lie Unteralg $T(V)_L$ die X enthält. Also

$$FL \subset \phi^{-1}(\sigma(L))$$

Die Einschränkung von ϕ auf FL ist also eine ~~Abb~~

$$FL \xrightarrow{\phi} \sigma(L)$$

Wir def

$$\Theta : FL \xrightarrow{\phi} \sigma(L) \xrightarrow{\sigma^{-1}} L$$

Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & L \\ FL \arrow[ur, "\Theta"'] & \end{tikzcd}$$

$(X \subset FL)$

Denn für $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} \Theta(i(x)) &= \sigma^{-1} \phi \, i \, (x) \\ &= \sigma^{-1} \phi(x) \\ &= \sigma^{-1} \sigma \, f(x) \end{aligned}$$

$= f(x)$

Sei $FL \xrightarrow{\hat{\theta}} L$ eine weitere solche Abb

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & L \\ FL \arrow[ur, "\hat{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

$(X \subset FL)$

Dann stimmt $\hat{\theta}$ mit θ auf X über ein. Da X die Lie Alg FL erzeugt, folgt $\hat{\theta} = \theta$.

□

Sei $X = \{x_j \mid j \in I\}$ eine Menge und (FL, i) eine freie Lie Alg über X.

Sei R ein Ideal in FL erzeugt von Elementen f_K. Dann heißt FL/R die Lie Alg mit Erzeugenden x_j und Relationen $f_K = 0$

//

15.5.09