6. Die Struktur halbeinfacher Lie Alg

In diesem Kapitel ist G eine halbeinfache Lie Alg über $\mathbb{C}$ und H eine Cartan Unteralg von G.

6.1 Zerlegung von G

Sei $\alpha \in H^*$. Def

$$G_\alpha = \{ x \in G \mid [h, x] = \alpha(h) x \quad \forall_{h \in H} \}$$

Dann ist

$$G_0 = H$$

Sei $\alpha \in H^* \setminus \{0\}$ mit $G_\alpha \neq 0$. Dann heißt α <u>Wurzel</u> von G bzgl H.

Die Menge der Wurzeln wird mit

Φ bezeichnet.

<u>Theorem</u>

Es gilt

$$G = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} G_\alpha$$

<u>Bew</u>

Wir haben gesehen, daß die Elemente aus H diagonalisierbar sind. Da H auch kommutativ ist, sind die ad(h), $h \in H$ simultan diagonalisierbar. Das beweist die Beh.

$\square$

Aus der Jacobi Id folgt sofort

$$[G_\alpha, G_\beta] \subset G_{\alpha+\beta}$$

Sei $(,)$ die Killing Form auf G

<u>Satz</u>

1) $(,)$ ist nicht ausgeartet auf G und H.

2) $(G_\alpha, G_\beta) = 0$ wenn $\alpha + \beta \neq 0$

3) Die ~~Abb~~
$$\begin{aligned} G_\alpha &\longrightarrow G_{-\alpha}^* \\ x &\longmapsto (x, \ ) \end{aligned}$$
ist ein Isom

Die Abb
$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H^* \\ h &\longmapsto (h, \ ) \end{aligned}$$

ist ein Isom. Das Urbild von $\alpha \in H^*$ wird mit t_α bez.

Satz

1) Φ erzeugt H^*

2) $\alpha \in \Phi$ impliziert $-\alpha \in \Phi$

3) Sei $\alpha \in \Phi$, $x \in G_\alpha$, $y \in G_{-\alpha}$. Dann $[x, y] = (x, y) t_\alpha$

4) Sei $\alpha \in \Phi$. Dann ist $\alpha(t_\alpha) \neq 0$

Bew

1) Ansonsten gibt es ein $h \in H \setminus \{0\}$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Dann kommutiert h mit allen Elementen

aus G, d.h. h ist im Zentrum von G. Das ist unmöglich.

2) Das folgt daraus, daß $(,)$ nicht ausgeartet auf G ist.

3) Sei $h \in H$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
(h, [x,y]) &= ([hx], y) \\
&= \alpha(h)\,(x,y) \\
&= (t_\alpha, h)\,(x,y) \\
&= (h, (x,y)\,t_\alpha)
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$[x,y] = (x,y)\,t_\alpha$$

4) Angenommen $\alpha(t_\alpha) = 0$. Dann ist $[t_\alpha, x] = [t_\alpha, y] = 0$ für alle $x \in G_\alpha$, $y \in G_{-\alpha}$. Wähle $x \in G_\alpha$, $y \in G_{-\alpha}$ mit $(x, y) = 1$. Dann ist $[x, y] = t_\alpha$.

Die 3-dim Unteralg A erzeugt x, y, t_α ist auflösbar. A operiert in der adj. Darst auf G. Nach dem Th von Lie hat G eine Basis bzgl der die Matrizen dieser Darst obere Dreiecksmatrizen sind.

Folglich ist die Matrix zu $ad(t_\alpha) = ad([x, y])$ strikt obere Dreiecksmatrix, d.h. $ad(t_\alpha)$ ist nilpotent

$ad(t_\alpha)$ ist aber auch halbeinfach.

Also $ad(t_\alpha) = 0$ und $t_\alpha \in Z(G)$

Das ist unmöglich.

□

//

11.5.09

Für $\alpha \in \Phi$ def

$$H_\alpha = \mathbb{C} t_\alpha = [G_\alpha, G_{-\alpha}]$$

<u>Satz</u>

Sei $\alpha \in \Phi$. Dann gilt

1) $\dim G_\alpha = 1$

2) Es gibt ein eindeutiges $h_\alpha \in H_\alpha$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$

3) Es gibt zu jedem $x_\alpha \in G_\alpha \setminus \{0\}$ ein eindeutiges $y_\alpha \in G_{-\alpha}$ mit

$$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$$

Es ist

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$$

$$[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$$

Die Unteralg

$$S_\alpha = G_\alpha \oplus H_\alpha \oplus G_{-\alpha}$$

ist isom zu $sl_2(\mathbb{C})$

Bew

Es ist $\alpha(t_\alpha) \neq 0$. Setze

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(t_\alpha, t_\alpha)}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus $\dim H_\alpha = 1$.

Sei $x_\alpha \in G_\alpha \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein $y_\alpha \in G_{-\alpha}$ mit $(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$. Durch Reskalieren

$$[x_\alpha, y_\alpha] = (x_\alpha, y_\alpha) t_\alpha = h_\alpha$$

Es gilt

$$[h_\alpha, x_\alpha] = \alpha(h_\alpha) x_\alpha = 2 x_\alpha$$

$$[h_\alpha, y_\alpha] = -\alpha(h_\alpha) y_\alpha = -2 y_\alpha$$

d.h. $\mathbb{C} x_\alpha \oplus \mathbb{C} h_\alpha \oplus \mathbb{C} y_\alpha$ ist eine Unteralg von G isom zu $sl_2(\mathbb{C})$.

Angenommen $\dim G_\alpha > 1$. Dann ist auch $\dim G_{-\alpha} > 1$ und es gibt ein $y \in G_{-\alpha}$ mit $(x_\alpha, y) = 0$. Es folgt

$$[x_\alpha, y] = 0$$

$$[h_\alpha, y] = -2y$$

d.h. y ist ein Höchstgewichtsvektor von $\mathbb{C}x_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathbb{C}y_\alpha$ mit Gewicht -2. Das ist unmöglich.

Also $\dim G_\alpha = 1$.

Die Eindeutigkeit von y_α folgt jetzt aus $\dim G_{-\alpha} = 1$.

$\square$

<u>Satz</u>

Seien $\alpha, \beta \in \Phi$. Dann ist

$$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$$

und

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$$

<u>Bew</u>

Die Lie Alg $G_\alpha \oplus H_\alpha \oplus G_{-\alpha}$ operiert in der adj. Darst auf G. Für $y \in G_\beta \setminus \{0\}$ ist

$$[h_\alpha, y] = \beta(h_\alpha)\, y = m y$$

Da G endlich dim ist, sind die Eigenwerte von h_α in $\mathbb{Z}$. Also $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Wähle $x_\alpha \in G_\alpha \setminus \{0\}$, $y_\alpha \in G_{-\alpha} \setminus \{0\}$ so daß $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Def

$z = y_\alpha^m \cdot y$ falls $m \geq 0$

$z = x_\alpha^{-m} \cdot y$ falls $m < 0$

Wir haben in 4.5 gesehen, daß y_α^m bzw x_α^{-m} Isom sind, d.h. $z \neq 0$. Da z Gewicht $\beta - m\alpha$ hat, folgt $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.

$\square$

Satz

Sei $\alpha \in \Phi$. Dann sind $\pm\alpha$ die einzigen komplexen Vielfachen von α in Φ.

Bew

$V = H \oplus \bigoplus_{c \in \mathbb{C}^*} G_{c\alpha}$ ist ein endlich-dim S_α-Modul. Die Gewichte von h_α sind 0 und $c\alpha(h_\alpha) = 2c$.

Somit ist $2c \in \mathbb{Z}$. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 von h_α ist H.

H zerfällt in

$$H = H_\alpha \oplus \mathrm{Ker}(\alpha)$$

H_α gehört zum irred S_α-Modul S_α und $\mathrm{Ker}(\alpha)$ ist triv S_α-Modul

Die einzigen geraden Eigenwerte von h_α sind also $-2, 0, 2$. Insbesondere ist 2α keine Wurzel und somit auch nicht $\frac{1}{2}\alpha$. Damit ist 1 kein Eigenwert von h_α. Also hat t_α keine ungeraden Gewichte.

Es folgt

$$V = S_\alpha \oplus \operatorname{Ker}(\alpha)$$

Somit sind die einzigen Viel-fachen von α, die Wurzeln sind, gerade $\pm\alpha$.

$\square$

<u>Satz</u>

Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ und $\beta \neq \pm\alpha$. Sei r die größte ganze Zahl, so daß $\beta - r\alpha$ Wurzel ist, und q die größte ganze Zahl, so daß $\beta + q\alpha$ Wurzel ist. Dann sind alle $\beta + j\alpha$, $-r \leq j \leq q$, Wurzeln und $r - q = \beta(h_\alpha)$.

<u>Satz</u>

Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$. Dann

$$[G_\alpha, G_\beta] = G_{\alpha+\beta}$$

Da H^* kanonisch isomorph zu H ist, können wir die Killing Form auf H^* transferieren.

Für $\alpha, \beta \in H^*$ ist

$$(\alpha, \beta) = (t_\alpha, t_\beta)$$

Satz

Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine beliebige Basis von H^* bestehend aus Wurzeln und sei $\beta \in \Phi$. Dann ist $\beta = \sum c_i \alpha_i$ mit rationalen c_i.

Bew

$$(\beta, \alpha_j) = \sum c_i (\alpha_i, \alpha_j)$$

$$\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum c_i \frac{(\alpha_i \alpha_j)}{(\alpha_j \alpha_j)}$$

$$\underbrace{\beta(h_{\alpha_j})}_{\in \mathbb{Z}} = \sum c_i \underbrace{\alpha_i (h_{\alpha_j})}_{\in \mathbb{Z}}$$

Wir erhalten so n Gl für die c_i mit ganzzahligen Koeff. Die Matrix $((\alpha_i, \alpha_j))$ ist nicht sing und somit auch die Matrix $(2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j))$. Die Matrix läßt sich also über $\mathbb{Q}$ invertieren.

$\square$

Die Wurzeln erzeugen also einen rationalen Vektorraum $V_{\mathbb{Q}}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} H^*$.

Satz

$(,)$ def eine rationale pos. def Bilinearform auf $V_{\mathbb{Q}}$.

Bew

Sei $\lambda \in H^*$. Dann operiert $ad(h_\lambda)$ diagonal auf

$$G = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} G_\alpha$$

mit Eigenwerten 0 und $\alpha(h_\lambda)$, $\alpha \in \Phi$.

Für $\lambda, \mu \in H^*$ ist somit

$$\begin{aligned}(\lambda, \mu) &= (t_\lambda, t_\mu) \\ &= tr(ad(t_\lambda)\, ad(t_\mu)) \\ &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)\, \alpha(t_\mu)\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$$

Sei $\beta \in \Phi$. Dann ist

$$\beta^2 = (\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2$$

und

$$\frac{4}{\beta^2} = \sum_{\alpha \in \Phi} \left(\frac{2(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)} \right)^2 = \sum_{\alpha \in \Phi} \underbrace{\alpha(h_\beta)^2}_{\in \mathbb{Z}}$$

Also $\beta^2 \in \mathbb{Q}$.

Sei $\alpha \in \Phi$. Dann ist

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \alpha(t_\beta) \in \mathbb{Z}$$

Somit ist $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$ für alle α, β in Φ und $(\,,\,)$ rational auf $V_{\mathbb{Q}}$.

Für $\beta \in V_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ ist weiterhin

$$\beta^2 = \sum_{\alpha \in \Phi} (\beta, \alpha)^2 > 0$$

$\square$ // 13.5.09

Sei $V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}}$ der reelle Vektorraum erzeugt von den Wurzeln

<u>Theorem</u>

1) Φ ist endlich, erzeugt V und $0 \notin \Phi$

2) Die einzigen reellen Vielfachen von $\alpha \in \Phi$ in Φ sind $\pm\alpha$.

3) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist

$$\beta(h_\alpha) = \frac{2(\beta,\alpha)}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}$$

$$\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$$

Φ ist also ein Wurzelsystem in V.

Da die Cartan Alg von G konj sind, hängt Φ nicht von der Wahl von H ab.

6.2 Die Weyl Basis

Sei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_e\}$ eine Basis von Φ. Def $h_i = h_{\alpha_i}$. Wähle $x_i \in G_{\alpha_i}$

und $y_i \in G_{-\alpha_i}$ mit $[x_i, y_i] = h_i$.

Def $a_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = \alpha_j(h_i)$

Theorem

G wird erzeugt von den Elementen x_i, h_i, y_i. Es gelten die folgenden Relationen

1) $[h_i h_j] = 0$

2) $[x_i, y_j] = \delta_{ij} h_i$

3) $[h_i x_j] = a_{ij} x_j \qquad [h_i y_j] = -a_{ij} y_j$

4) $ad(x_i)^{1-a_{ij}} x_j = 0$

$ad(y_i)^{1-a_{ij}} y_j = 0$ für $i \neq j$