3. Wurzelsysteme

In diesem Kapitel ist der Grund-Körper $\mathbb{R}$.

3.1 Definition

Sei V ein endlich dim euklidischer Vektorraum und $\alpha \in V \setminus \{0\}$

Die Spiegelung σ_α an der Hyperebene orth zu α ist gegeben durch

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{\alpha^2}\alpha$$

$$= \beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha$$

mit $\langle\beta,\alpha\rangle = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{\alpha^2}$

Eine Teilmenge Φ von V heißt
Wurzelsystem, wenn

1) Φ ist endlich, erzeugt V und $0 \notin \Phi$

2) Sei $\alpha \in \Phi$. Die einzigen Vielfachen von α in Φ sind $\pm \alpha$.

3) Für $\alpha \in \Phi$ ist $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$

4) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

Die Elemente aus Φ heißen Wurzeln.
Die Dimension von V wird als Rang von Φ bez.

Die Untergruppe W von $GL(V)$ erzeugt von den Spiegelungen σ_α, $\alpha \in \Phi$

wird als <u>Weyl Gruppe</u> von Φ bez.

Zwei Wurzelsysteme (V, Φ) und (V', Φ') heißen <u>isomorph</u>, wenn es einen Vektorraum isom $f: V \to V'$ mit $f(\Phi) = \Phi'$ und $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ gibt.

Die Weyl Gruppe W von Φ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\Phi)$.

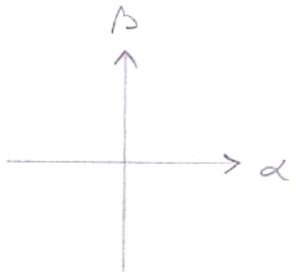
<u>Bsp</u>

Wir bez den Rang von Φ mit ℓ

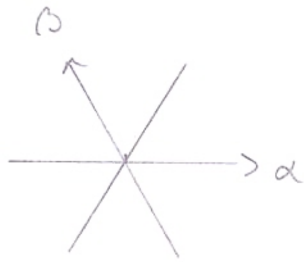
$\underline{l = 1}$

A_1

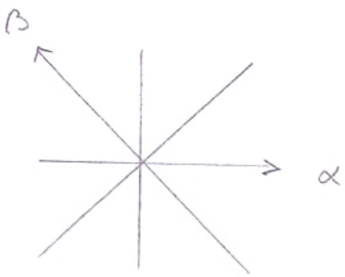
$\underline{l = 2}$



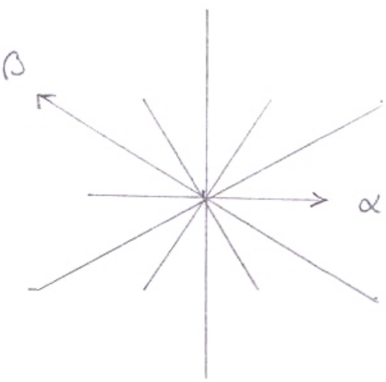
$A_1 \times A_1$



A_2



B_2



G_2

Seien $\alpha, \beta \in \Phi$. Die Bed $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ liefert starke Einschränkungen an den Winkel zwischen α und β.

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{\alpha^2} = 2 \frac{|\beta|}{|\alpha|} \cos \Theta$$

Somit ist

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \Theta$$
$$\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$\langle \alpha, \beta \rangle$ und $\langle \beta, \alpha \rangle$ haben dasselbe Vorzeichen.

Im letzten Fall ist $\beta = \pm \alpha$.

Für $\beta \neq \pm \alpha$ gibt es folgende 7 Möglichkeiten (bis auf Vertauschung von α und β)

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	Θ	$\frac{\lvert\beta\rvert^2}{\lvert\alpha\rvert^2}$
0	0	$\pi/2$	
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\frac{\lvert\beta\rvert^2}{\lvert\alpha\rvert^2}$
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Es folgt

Satz

Seien α und β Wurzeln mit $\beta \neq \pm\alpha$ und $(\alpha, \beta) > 0$. Dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel.

5.2 Einfache Wurzeln und die Weyl Gruppe

In diesem Abschnitt ist Φ ein Wurzelsystem des Rangs ℓ in einem euklidischen Vektorraum V mit

Weyl Gruppe W.

Eine Teilmenge Δ von Φ heißt

<u>Basis</u> von Φ, wenn

1) Δ ist eine Basis von V

2) Jede Wurzel $\beta \in \Phi$ kann geschrieben werden als

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} K_\alpha \alpha$$

mit ganzzahligen Koeff K_α, die entweder alle ≥ 0 oder alle ≤ 0 sind.

Die Wurzeln in Δ heißen <u>einfache</u> Wurzeln.

$\beta \in \Phi$ heißt <u>positiv</u> $(\beta > 0)$, wenn alle $k_\alpha \geq 0$ sind, und neg $(\beta < 0)$, wenn alle $k_\alpha \leq 0$ sind.

Sei Φ^+ die Menge der pos und Φ^- die Menge der neg Wurzeln. Dann ist

$$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$$

und

$$\Phi^- = -\Phi^+$$

Satz

Sei Δ eine Basis von Φ. Dann ist $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$.

Bew

Angenommen $(\alpha, \beta) > 0$. Dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel. Das ist unmöglich.

$\square$

$\gamma \in V$ heißt <u>regulär</u>, wenn $\gamma \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$, wobei P_α die Hyperebene orth zu α bez.

Für reg $\gamma \in V$ def wir

$$\Phi(\gamma)^+ = \{ \alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0 \}$$

Dann ist

$$\Phi = \Phi(\gamma)^+ \cup (-\Phi(\gamma)^+)$$

$\alpha \in \Phi(\gamma)^+$ heißt <u>zerlegbar</u>, wenn $\alpha = \beta_1 + \beta$ mit $\beta_1, \beta_2 \in \Phi(\gamma)^+$. Ansonsten heißt α unzerlegbar.

Theorem

Sei γ regulär. Dann ist die Menge $\Delta(\gamma)$ der unzerlegbaren Elemente in $\Phi(\gamma)^+$ eine Basis von Φ.
Jede Basis von Φ läßt sich auf diese Art schreiben.

Bew

1) Jede Wurzel in $\Phi(\gamma)^+$ ist Linear-Komb von Elementen in $\Delta(\gamma)$ mit ganzzahligen Koeff ≥ 0.
Sei I die Menge der Elemente, für die dies nicht der Fall ist. Angenommen $I \neq \emptyset$. Wähle $\alpha \in I$ so daß $(\alpha, \gamma) > 0$ minimal ist.

α ist zerlegbar. Also

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2$$

mit $\beta_1, \beta_2 \in \Phi(\gamma)^+$. Dann

$$(\alpha, \gamma) = \underbrace{(\beta_1, \gamma)}_{>0} + \underbrace{(\beta_2, \gamma)}_{>0}$$

Somit sind $\beta_1 \beta_2 \notin I$. Es folgt $\alpha \notin I$.

2) Seien $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann ist $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Angenommen $(\alpha, \beta) > 0$. Dann ist $\alpha - \beta$ Wurzel und entweder $\alpha - \beta \in \Phi(\gamma)^+$ oder $\beta - \alpha \in \Phi(\gamma)^+$.

Im ersten Fall ist α zerlegbar

und im zweiten Fall β.

3) Die Elemente in $\Delta(\varphi)$ sind lin unabh.

Sei $\sum_{\alpha \in \Delta(\varphi)} r_\alpha \alpha = 0$. Wir zerlegen die Summe in disjunkte Teile mit Koeff ≥ 0 und ≤ 0. Dann

$$\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$$

α und β laufen über disjunkte Mengen und $s_\alpha, t_\beta \geq 0$. Def

$$\varepsilon = \sum s_\alpha \alpha$$

Dann ist

$$\varepsilon^2 = \sum s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$$

Also $\varepsilon = 0$ und

$$0 = (\varepsilon, \gamma) = \sum s_\alpha \underbrace{(\alpha, \gamma)}_{>0}$$

Also $s_\alpha = 0$. Analog $t_\beta = 0$. //

4.5.09

4) $\Delta(\gamma)$ ist eine Basis von Φ.

Das folgt aus $\Phi = \Phi(\gamma)^+ \cup (-\Phi(\gamma)^+)$ und 1) und 3).

5) Sei $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ eine Basis von V. Dann gibt es ein $\gamma \in V$ mit $(\gamma, v_i) > 0$ für alle i.

Sei w_i' die orth Proj von v_i auf die Hyperebene erzeugt von $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_\ell\}$ und $w_i = v_i - w_i'$.

Dann ist $(w_i, v_j) = 0$ für alle $j \neq i$

und $(w_i v_i) = w_i (w_i + w_i') = w_i^2 > 0$

Wähle $\gamma = \sum r_i w_i$ mit allen $r_i > 0$.

6) Jede Basis Δ von Φ ist der Form $\Delta(\gamma)$ für ein geeignetes reg $\gamma \in V$.

Wähle ein $\gamma \in V$ mit $(\gamma, \alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Dann ist γ regulär und $\Phi^+ \subset \Phi(\gamma)^+$. Aus

$\Phi = \Phi^+ \cup (-\Phi^+)$ folgt dann

$\Phi^+ = \Phi(\gamma)^+$. Sei $\alpha \in \Delta$. Dann ist

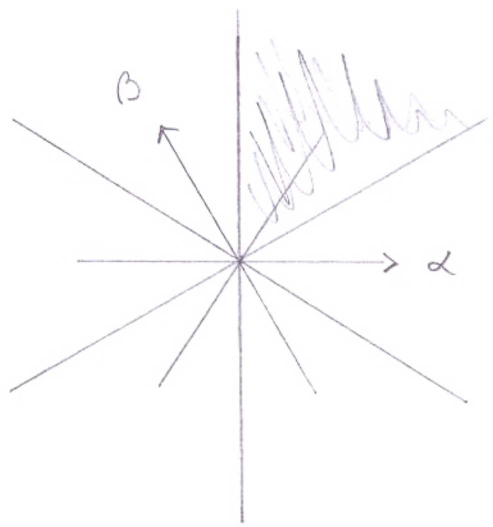
α unzerlegbar (Sonst ist α Summe von Elementen aus Φ^+ und aus Δ. Das widerspricht der ein Unabh von Δ.) Also $\Delta \subset \Delta(\gamma)$.

Es folgt $\Delta = \Delta(\gamma)$

$\square$

Die Hyperebenen P_α, $\alpha \in \Phi$ zerteilen V in endlich viele Regionen. Die Zusammenhangskomp von

$V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ heißen <u>Weyl Kammern</u>



Jedes reg $\gamma \in V$ gehört zu genau einer Weyl Kammer $C(\gamma)$.

Sind $\gamma, \gamma' \in V$ regulär und $C(\gamma) = C(\gamma')$ so folgt $\Phi(\gamma)^+ = \Phi(\gamma')^+$ und somit $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$

Es besteht also eine bijektive Korrespondenz zwischen Basen und Weyl Kammern.

Ist eine Basis Δ gegeben, so ist die zugehörige Weyl Kammer

$$C = \{ \gamma \in V \mid (\gamma, \alpha) > 0 \quad \forall_{\alpha \in \Delta} \}$$

Ist die Weyl Kammer C

gegeben, so stehen die einfachen Wurzeln der zugehörigen Basis Δ senkrecht auf den Wänden der Kammer und haben pos inneres Produkt mit allen Elementen aus C.

Für reg $\gamma \in V$ und $\sigma \in W$ gilt

$$\sigma(C(\gamma)) = C(\sigma(\gamma))$$

und

$$\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$$

weil σ eine Isometrie auf V ist.

Satz

Sei Δ eine Basis von Φ. Dann kann jede pos. Wurzel $\beta \in \Phi^+$ geschrieben werden als

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad , \quad \alpha_i \in \Delta$$

(die α_i sind nicht notwendig verschieden) so daß die Partialsummen

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

alle Wurzeln sind.

Satz

Sei Δ eine Basis von Φ und $\alpha \in \Delta$. Dann permutiert σ_α die Menge

$\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$

Bew

Sei $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ und $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$.

Da $\beta \neq \alpha$ ist, gibt es ein $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ mit $k_\gamma \neq 0$. Dann ist der Koeff von γ in $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ positiv, d.h. $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$.

$\square$

Der Vektor

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$$

heißt Weyl Vektor

Für $\alpha \in \Delta$ ist

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

Theorem

1) Sei Δ eine Basis von Φ
Dann wird W von den σ_α, $\alpha \in \Delta$ erzeugt.

2) W operiert einfach transitiv auf den Basen von Φ und somit auch auf den Weyl Kammern.

Sei $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von Φ.

Die Cartan Matrix von Φ (bzgl Δ) ist def als

$$(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$$

Es ist $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$ und $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, -1, -2, -3$ für $i \neq j$

Da die Weyl Gruppe transitiv auf den Basen operiert, hängt die Cartan Matrix nicht von der Wahl der Basis ab.

Bsp

$A_1 \times A_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Satz</u>

Sei Δ eine Basis von Φ. Sei Φ' ein Wurzelsystem in V' mit Basis Δ' und $\phi : \Delta \longrightarrow \Delta'$ eine Bijektion mit

$$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall_{\alpha, \beta \in \Delta}$$

Dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung $f : V \longrightarrow V'$ von ϕ mit $f(\Phi) = \Phi'$ und $\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$.

Satz

Ein Wurzelsystem ist bis auf Isomorphie durch seine Cartan Matrix festgelegt.

Sei $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von Φ. Der Coxeter Graph von Φ (bzgl Δ) ist def als der Graph mit ℓ Vertices, wobei die Vertices i und j durch

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 4 \cos^2 \theta$$

Kanten verbunden werden.

Der Coxeter Graph hängt nicht von der speziellen Wahl der Basis ab

<u>Bsp</u>

$A_1 \times A_1$	• •
A_2	•—•
B_2	•═•
G_2	•≡•

Φ heißt <u>irreduzibel</u>, wenn Φ nicht in zwei echte orth Teilmengen zerfällt.

Satz

Φ läßt sich eindeutig in irred Komp zerlegen.

Φ $(\neq \emptyset)$ ist genau dann irred, wenn sein Coxeter Graph sammenhängend ist.

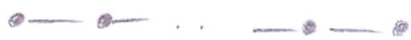
Satz

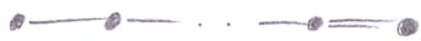
Sei Φ irreduzibel. Dann operiert W irreduzibel auf V. Weiterhin gibt es höchstens 2 Wurzel-längen in Φ und alle Wurzeln gegebener Länge sind konjugiert unter W.

Man spricht von langen und kurzen Wurzeln.

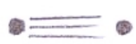
<u>Theorem</u>

Sei Φ ein <u>irred</u> Wurzelsystem vom Rang l. Dann ist der Coxeter Graph von Φ einer der folgenden

A_l  $(l \geq 1)$

B_l  $(l \geq 2)$

D_l  $(l \geq 4)$

G_2 

F_4 

E_6 

E_7 

E_8 

<u>Bew</u>

Sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Die Vertices i und j des zugehörigen Coxeter Graphen sind verbunden durch

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 4 \cos^2 \theta$$

Kanten. Diese Zahl ist unabh von der Skalierung.

Sei V ein euklidischer Vektor-

raum und $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ eine Menge von n lin. unabh. Vektoren in V.
$\mathcal{U}$ heißt <u>zulässige Konfiguration</u>, wenn

1) $u_i^2 = 1$

2) $(u_i, u_j) \leq 0$ für $i \neq j$

3) $4(u_i, u_j)^2 = 0, 1, 2$ oder 3 für $i \neq j$

Wir ordnen einer zulässigen Konf $\mathcal{U}$ einen Coxeter Graphen zu indem wir die Vertices i und j durch $4(u_i u_j)^2$ Kanten verbinden.

Wir bestimmen die möglichen Coxeter Graphen zulässiger Konfiguration

1) Läßt man einige Vektoren u_i einer zulässigen Konf $\mathfrak{U}$ weg, so erhält man eine zulässige Konf $\mathfrak{U}'$. Den Graphen dieser Konf erhält man durch das Weglassen entsprechender Vertices und Kanten.

2) Die Anzahl der Paare verbundener Punkte ist $< n$.

Sei K die Anzahl der verbundenen Paare (i,j) mit $i \neq j$. Def

$$u = \sum_{i=1}^{4} u_i$$

Dann ist

$$u^2 = \sum_{i=1}^{4} u_i^2 + 2 \sum_{i<j} u_i u_j$$

Sei (i,j) ein verbundenes Paar. Dann ist $u_i u_j < 0$ und wegen $4(u_i u_j)^2 = 0, 1, 2$ oder 3 folgt $2 u_i u_j \leq -1$. Somit

$$0 < u^2 \leq n - K$$

3) Das coxeter Diag enthält

keine geschlossenen Wege.

Das folgt aus 2)

4) Von einem Punkt gehen höchstens 3 Linien aus.

Sei u ein Punkt und seien $v_1, \ldots, v_K$ die Punkte verbunden mit u.

Keine zwei v_j sind verbunden, d.h. $v_i v_j = 0$ für $i \neq j$.

In dem Raum erzeugt von $u, v_1, \ldots, v_K$ gibt es ein v_0 mit $v_0^2 = 1$ und $(v_0 v_j) = 0$ für $j = 1, \ldots, K$. Dann ist

$(u, v_0) \neq 0$ und $u = \sum_{j=0}^{n} (u, v_j) v_j$.

Es folgt

$$1 = u^2 = \underbrace{(u, v_0)^2}_{>0} + \sum_{j=1}^{n} (u, v_j)^2$$

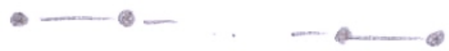
Also

$$\sum_{j=1}^{n} 4 (u, v_j) < 4$$

// 6.5.09

5) Die einzige zusammenhängende zulässige Konf, die eine dreifach Linie enthält ist

6) Sei $\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathcal{U}$ mit Graph



Dann ist $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} \setminus \{v_1, \dots, v_k\}) \cup \{v\}$
mit $v = \sum_{i=1}^{k} v_k$ eine zulässige Konf.

(Man erhält den Graphen von $\mathcal{U}'$
durch Zusammenziehen der Kette
auf einen Punkt

)

$\mathcal{U}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{U}'$

Die Lin Unabh von $\mathcal{U}'$ ist klar

$$v^2 = K + \sum_{i<j} \underbrace{2(v_i, v_j)}_{= -1 \text{ für } j = i+1, \ 0 \text{ sonst}}$$

$$= K - (K-1) = 1$$

Jedes $u \in U \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$ kann nach 3) mit höchstens einem v_j verbunden sein. Also

$$(u,v) = 0$$

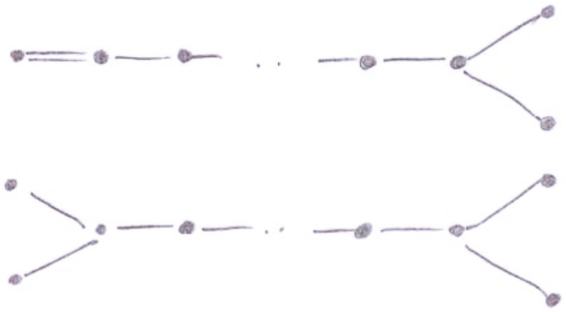
oder

$$(u,v) = (u,v_i)$$

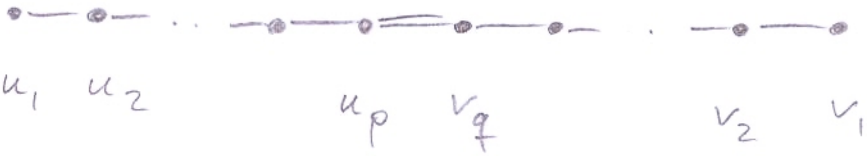
für ein i. In jedem Fall

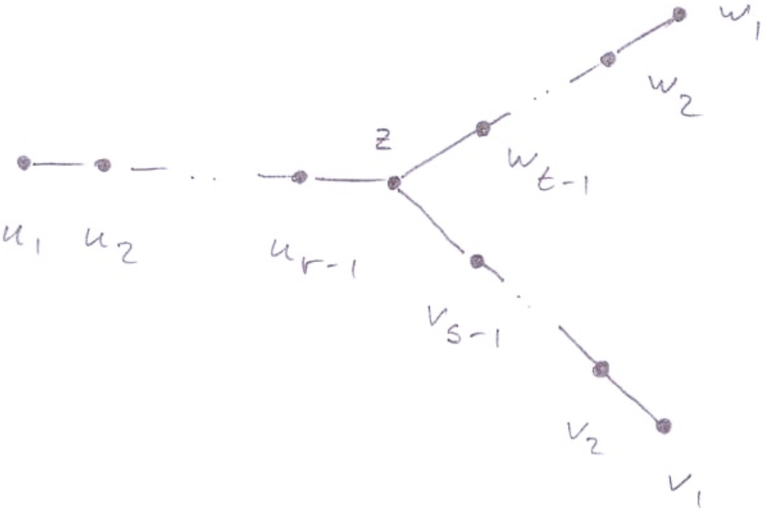
$$4(u,v)^2 = 0, 1, 2 \text{ oder } 3.$$

7) Der Graph von U enthält keine Untergraphen der Form



8) Der Graph einer zshgden zu-
lässigen Konf ist der Form





9) Die einzigen Graphen vom zweiten Typ in 8) sind

F_4

B_n

Def

$$u = \sum_{i=1}^{p} i u_i \qquad v = \sum_{j=1}^{q} j v_j$$

$$2(u_i, u_{i+1}) = 2(v_j, v_{j+1}) = -1$$

$$u^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1)$$

$$= p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i$$

$$= p^2 - \tfrac{1}{2} p(p-1) = \tfrac{1}{2} p(p+1)$$

$$v^2 = \tfrac{1}{2} q (q+1)$$

$$(u,v) = (p u_p, q v_q) = 2 (u_p, v_q)\, pq/2$$

$$(u,v)^2 = 4 (u_p, v_q)^2 p^2 q^2/4 = p^2 q^2/2$$

Aus der Ungl von Cauchy Schwarz folgt

$$(u,v)^2 < u^2 v^2$$

so daß

$$p^2 q^2/2 < p(p+1)\, q(q+1)/4$$

bzw

$$2pq < (p+1)(q+1)$$

und

$$(p-1)(q-1) < 2$$

Also ist

$p=1$, q beliebig

oder

$q=1$, p beliebig

oder

$p=q=2$

10) Die einzigen Diag vom vierten Typ in 8) sind

D_n

E_6, E_7, E_8

Def $u=\sum i u_i$, $v=\sum j v_j$, $w=\sum k w_k$

Dann sind u, v, w paarweise orth und z ist nicht im Aufspann von u, v, w.

Wir können annehmen, daß

$$2 \le r \le s \le t$$

Es ist

$$u^2 = \frac{1}{2} r(r-1)$$

$$v^2 = \frac{1}{2} s(s-1)$$

$$w^2 = \frac{1}{2} t(t-1)$$

Es gibt ein $x \neq 0$ im Aufspann von u, v, w, z das orth zu u, v, w ist.

Dann

$$z = \frac{(z,u)}{u^2} u + \frac{(z,v)}{v^2} v + \frac{(z,w)}{w^2} w + \underbrace{\frac{(z,x)}{x^2}}_{\neq 0} x$$

und

$$1 = z^2 = \underbrace{\frac{(z,u)^2}{u^2} + \frac{(z,v)^2}{v^2} + \frac{(z,w)^2}{w^2}}_{<1} + \frac{(z,x)^2}{x^2}$$

Mit

$$\begin{aligned}(z,u)^2 &= (z, (r-1)\, u_{r-1})^2 \\ &= (r-1)^2\, \underbrace{4\,(z, u_{r-1})^2}_{=1}/4 \\ &= (r-1)^2/4\end{aligned}$$

und

$$\frac{(z,u)^2}{u^2} = \frac{(r-1)^2/4}{r(r-1)/2} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

folgt

$$\left(1-\frac{1}{r}\right) + \left(1-\frac{1}{s}\right) + \left(1-\frac{1}{t}\right) < 2$$

und

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} > 1$$

Es ist

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{s} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$$

Somit

$$1 < \frac{3}{r} \leq \frac{3}{2}$$

Also $\underline{r = 2}$. Dann

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{s} \leq 1$$

und

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{s} \leq 1$$

d.h. $\underline{s = 2 \text{ oder } 3}$.

Falls $s = 2$ so kann t beliebig sein und wir erhalten die D_n Graphen.

Falls $s=3$, so

$$\frac{1}{t} > \frac{1}{6}$$

und

$$3 \leq t < 6$$

d.h. $t = 3, 4, 5$. Dies liefert E_6, E_7 und E_8.

$\square$

Durch explizite Konstruktion zeigt man

<u>Theorem</u>

Zu jedem der angegebenen Diag existiert ein irred Wurzelsystem welches dieses als Coxeter Diag hat.

5.3 Dynkin Diagramme

Der Coxeter Graph eines irred Wurzelsystems legt die Cartan Matrix und damit das Wurzelsystem nicht eindeutig fest, da er nur die Winkel zwischen den einfachen Wurzeln beschreibt aber nichts über die Längen aussagt. Fügt man in den Coxeter Graphen einen Pfeil ein, der auf die kürzere Wurzel zeigt, so erhält man das Dynkin Diag.

Satz

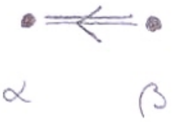
Das Dynkin Diag eines irred Wurzelsystems legt dieses bis auf Isomorphie fest.

Bew

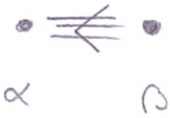
Die Cartan Matrix kann folgendermaßen rekonstruiert werden

1) $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$

2)  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -1$

3)  $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$

$\langle \beta, \alpha \rangle = -2$

4)  $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$

$\langle \beta, \alpha \rangle = -3$

$\square$

Theorem

Sei Φ ein irred Wurzelsystem vom Rang l. Dann ist das Dynkin Diag von Φ eins der folgenden

A_l  $(l \geq 1)$

B_l  $(l \geq 2)$

C_l  $(l \geq 3)$

D_l  $(l \geq 4)$

G_2  F_4 

E_6 

E_7 

E_8 

Theorem

Jedes der angegebenen Diag ist das Dynkin Diag eines irred Wurzelsystems.