4. Die Lie Alg $sl_2(\mathbb{C})$ und ihre Darstellungen

4.1 Die Lie Alg $sl_2(\mathbb{C})$

Die Lie Alg

$$sl_2(\mathbb{C}) = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid tr(M) = 0 \}$$

ist eine einfache Lie Alg vom Rang 1. Die Elemente

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $G = sl_2(\mathbb{C})$ und

$$[x\, y] = h \,, \quad [h\, x] = 2x \,, \quad [h\, y] = -2y$$

$ad(h)$ hat 3 verschiedene Eigenwerte: $-2, 0, 2$

Also ist h halbeinfach und $H = \mathbb{C}h$ eine Cartan Unteralg von G.

Die Unteralg $N^+ = \mathbb{C}x$ und $N^- = \mathbb{C}y$ sind nilp und

$$G = N^- \oplus H \oplus N^+$$

$B = H \oplus N^+$ ist eine max auflösbare Unteralg. Solche Alg werden als <u>Borel Unteralg</u> bez.

4.2 Moduln und Gewichte

Sei V ein G-Modul. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ def wir

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid h.v = \lambda v \}$$

Ein Element $v \in V_\lambda$ hat Gewicht λ.

Ist $V_\lambda \neq 0$, so heißt λ Gewicht von V.

Satz

1) Die Summe $\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$ ist direkt.

Falls $\dim V < \infty$, so ist $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$

2) $x V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$

$y V_\lambda \subset V_{\lambda-2}$

Bew

1) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind lin. unabh.

h ist halbeinfach, d.h. diagonalisierbar auf endlich dim Moduln über $\mathbb{C}$.

2) Sei $v \in V_\lambda$. Dann ist

$$h.x.v = [h,x]v + x.h.v$$
$$= 2x.v + \lambda x.v$$
$$= (\lambda+2)\, x.v$$

d.h. $x.V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$. Analog für y.

□

Sei V ein G-Modul und $\lambda \in \mathbb{C}$.
Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt Höchstgewichtsvektor vom Gewicht λ, wenn

1) $h.v = \lambda v$
2) $x.v = 0$

Satz

Sei V ein G-Modul und $v \in V \setminus \{0\}$.
v ist Höchstgewichtsvektor mit Gewicht λ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann wenn $\mathbb{C}v$ inv unter B ist.

Bew.

„$\Rightarrow$"

ist klar

„$\Leftarrow$"

Sei $h.v = \lambda v$ und $x.v = \mu x$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} [h,x]v & = & 0 \\ \parallel & & \\ 2xv & = & 2\mu v \end{array}$$

so daß $\mu = 0$.

$\square$

Satz

Sei $V \neq 0$ ein endlich dim G-Modul. Dann hat V einen Höchstgewichtsvektor.

Bew

B operiert auf V. Da B auflösbar ist, gibt es nach dem Theorem von Lie ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit

$B.v \subset \mathbb{C} v$.

$\square$

4.3 Untermoduln erzeugt von Höchstgewichtsvektoren

Theorem

Sei V ein G-Modul und $v \in V \setminus \{0\}$ ein Höchstgewichtsvektor mit Gewicht λ. Def

$$v_n = Y^{(n)} v = \frac{Y^n}{n!} v \quad \text{für } n \geq 0$$

$$v_{-1} = 0$$

Dann gilt für $n \geq 0$

1) $h . v_n = (\lambda - 2n) v_n$

2) $Y . v_n = (n+1) v_{n+1}$

3) $X . v_n = (\lambda - n + 1) v_{n-1}$

<u>Bew</u>

1), 2) sind klar.

3) folgt durch Ind über n.

Korollar

Es können nur 2 Fälle auftreten.

Entweder

1) Die Vektoren v_n, $n \geq 0$, sind alle lin unabh.

oder

2) Das Gewicht λ von v ist eine ganze Zahl $m \geq 0$, die Elemente $v_0, \ldots, v_m$ sind lin unabh und $v_j = 0$ für $j \geq m+1$.

Bew

Da die Vektoren v_j verschiedene Gewichte haben, sind die $v_j \neq 0$

lin. unabh.

Sind alle $v_j \neq 0$, so sind wir im ersten Fall.

Sind nicht alle $v_j \neq 0$, so gibt es ein $m \geq 0$ mit $v_0, \ldots, v_m \neq 0$ und $v_{j+m} = 0$ für $j \geq 1$. Es folgt

$$x . v_{m+1} = (\lambda - (m+1) + 1) v_m = 0$$

d.h. $\lambda = m$.

$\square$

<u>Korollar</u>

Sei V endlich dim. Dann sind wir im Fall 2). Die Vektoren $v_0, \ldots, v_m$ erzeugen einen <u>irred</u> Untermodul von V.

Bew

Es ist klar, daß wir im Fall 2) sind und die Vektoren $v_0, \dots, v_m$ einen Untermod W von V erz. (Dies ist der G-Modul erzeugt von v.) Die Eigenwerte von h auf W sind $m, m-2, \dots, -m$. Sie haben Mult 1. Sei $W' \neq 0$ ein Untermod von W. Da W' inv unter h ist und h diag ist, enthält W' einen der Eigenvektoren v_j. Anwendung von x zeigt, daß W' die Vektoren $v_{j-1}, \dots, v_0$ enthält und Anw von Y zeigt, daß W' die Vektoren $v_{j+1}, \dots, v_m$ enthält. Also ist $W' = W$.

$\square$

// 29.4.09

4.4 Die Moduln W_m

Sei $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ und W_m ein $m+1$-dimensionaler Vektorraum mit Basis $v_0, \dots, v_m$. Wir def Endomorphismen auf V durch

$$H v_n = (m-2n) v_n$$

$$Y v_n = (n+1) v_{n+1}$$

$$X v_n = (m-n+1) v_{n-1}$$

(mit der Konvention $v_{-1} = v_{m+1} = 0$)

Dann gilt

$$HXv_k - XHv_k = 2Xv_k$$

$$HYv_k - YHv_k = -2Yv_k$$

$$XYv_k - YXv_k = Hv_k$$

d.h. W_m ist ein G-Modul

<u>Theorem</u>

1) W_m ist ein irred G-Modul
2) Jeder irred G-Modul der Dim $m+1$ ist isom zu W_m

<u>Bew</u>

1) Der Vektor v_0 ist ein Höchst-

gewichtsvektor mit Gewicht m.
Die Aussage folgt dann aus dem letzten Korollar.

2) Sei V ein G-Modul der Dim $m+1$. Dann hat V einen Höchstgewichtsvektor v. Das Gewicht m' von v ist ganzzahlig und ≥ 0. Der Untermodul V' erzeugt von v hat Dim $m'+1$ (und ist irred). Da V irred ist, folgt $V = V'$ und $m = m'$. Die Formeln aus dem Th in 4.3 zeigen, daß V und V' isom als G-Moduln sind.

$\square$

Bsp

W_0 ist der 1-dim triviale G-Modul.

$\mathbb{C}^2$ mit der natürlichen Operation von G ist isom zu W_1.

Die adj. Darst von G ist isom zu W_2.

4.5 Die Struktur endlich dim G-Moduln

Aus dem Th von Weyl folgt

Theorem

Jeder endlich dim G-Modul ist isom zur Summe geeigneter W_m

Theorem

Sei V ein endlich dim G-Modul.

1) H operiert diagonalisierbar auf V. Die Eigenwerte sind ganzzahlig. Ist n ein Eigenwert von H, so auch $n, n-2, \ldots, -n$.

2) Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Dann sind die lin Abb

$$X^n : V_{-n} \longrightarrow V_n$$
$$Y^n : V_n \longrightarrow V_{-n}$$

Isomorphismen.

<u>Bew</u>

Die Aussagen gelten für die Darst W_m und somit auch für V.

(In W_m gilt

	Gew
v_0	m
v_k	$m-2k$
v_m	$-m$

Für $0 < k \leq m$ ist $x v_k \neq 0$ weil

$k \neq m+1$.)

$\square$