3. Cartan Unteralgebren

In diesem Abschnitt bezeichnet G eine endlich dim Lie Alg über $\mathbb{C}$.

3.1 Definition

Sei A eine Unteralg von G. Der Normalisator von A ist

$$N_G(A) = \{ x \in G \mid ad(x) A \subset A \}$$

$N_G(A)$ ist eine Unteralg von G.

Eine Unteralg H von G heißt <u>Cartan Unteralg</u> von G wenn

1) H ist nilpotent

2) $N_G(H) = H$

3.2 Einige Resultate aus der Topologie und der alg Geometrie

Ein top Raum X heißt <u>irreduzibel</u>, wenn gilt:

$X = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 abgeschlossen impliziert $X = X_1$ oder $X = X_2$.

<u>Satz</u>

Ein top Raum X ist genau dann irred, wenn gilt:

X_1, X_2 offen, nichtleer impliziert $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$

Eine Teilmenge U eines top Raums X heißt <u>irred</u>, wenn U bzgl der ind Top irred ist.

<u>Satz</u>

Sei X ein irred top Raum und U eine nichtleere offene Teilmenge von X. Dann ist U irred und dicht in X.

<u>Bew</u>

Es ist klar, daß U irred ist.
Es gilt $X = U \cup U^c$ und somit $X = \bar{U} \cup U^c$. Folglich ist $X = \bar{U}$ oder $X = U^c$. Wegen $U \neq \emptyset$ folgt $X = \bar{U}$.

$\square$

Ein top Raum X heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn gilt:

Ist $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 offen und disjunkt, so folgt $X_1 = \emptyset$ oder $X_2 = \emptyset$.

Sei X ein top. Raum. Ist X irred so auch zusammenhängend.

Eine Teilmenge Y des $\mathbb{C}^n$ heißt <u>algebraisch</u>, wenn es eine Menge T von Polynomen in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ gibt mit

$$Y = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0 \quad \forall_{f \in T} \}$$

Wir def offene Mengen als Komplemente algebraischer Mengen. Diese bilden die <u>Zariski Topologie</u> auf dem $\mathbb{C}^n$.

Die Standardtopologie des $\mathbb{C}^n$ ist feiner als die Zariski Top.

<u>Satz</u>

$\mathbb{C}^n$ ist irred bzgl der Zariski Top

<u>Bew</u>

Angenommen $\mathbb{C}^n = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 nichtleer und abgeschlossen, d.h.

$$X_1 = \{ x \in \mathbb{C} \mid f(x) = 0 \quad \forall_{f \in T_1} \}$$

$$X_2 = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0 \quad \forall_{f \in T_2} \}$$

für geeignete nichtleere Teilmengen $T_1, T_2 \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Falls $T_1 = \{0\}$ oder $T_2 = \{0\}$, sind wir fertig.

Ansonsten wählen wir $f \in T_1 \setminus \{0\}$, $g \in T_2 \setminus \{0\}$. Dann verschwindet fg auf ganz $\mathbb{C}^n$. Das ist absurd.

$\square$

3.3 Reguläre Elemente

Sei $x \in G$, $G \neq 0$ und

$$P_x(t) = \det(\mathrm{ad}(x) - t\,\mathrm{Id})$$

das char Polynom von $\mathrm{ad}(x)$.

Mit $n = \dim G$ können wir schreiben

$$P_x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, t^n$$

wobei

$$a_n(x) = (-1)^n$$

$$a_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(\mathrm{ad}(x))$$

$$a_0(x) = \det(\mathrm{ad}(x)) = 0$$

Wählen wir eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$

von G, so ist $a_K(x) = a_K(x_1, \dots, x_n)$ ein Polynom vom Grad $n-K$.

Der Rang von G ist die kleinste Zahl l, so daß a_l nicht identisch 0 ist.

Es ist $1 \leq l \leq n$ und $l = n$ genau dann wenn G nilpotent ist.

Ein Element $x \in G$ heißt regulär, wenn $a_l(x) \neq 0$.

Wir bezeichnen die Menge der regulären Elemente mit G_r. Also

$$G_r = \{ x \in G \mid a_l(x) \neq 0 \}$$

Da G irred ist, folgt

<u>Satz</u>

G_r ist eine offene dichte Teilmenge von G (bzgl der Zariski Top)

Die Aussage gilt auch für die Standardtop des $\mathbb{C}^n$

3.4 Existenz von Cartan Unteralg

Für $x \in G$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ def wir den verallgem. Eigenraum

$$G(x)_\alpha = \{ y \in G \mid (ad(x) - \alpha \, Id)^m y = 0 \text{ für } m \gg 0 \}$$

$$= \{ y \in G \mid (ad(x) - \alpha \, Id)^n y = 0 \}$$

Dann ist

$$G = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} G(x)_\alpha$$

und

$$P_x(t) = (\alpha_1 - t)^{n_1} \quad \dots \quad (\alpha_r - t)^{n_r}$$

mit $n_i = \dim G(x)_{\alpha_i}$.

Insbesondere ist $\dim G(x)_0$ die kleinste ganze Zahl i, so daß $a_i(x) \neq 0$.

<u>Satz</u>

Sei $x \in G$. Dann

1) $G = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} G(x)_\alpha$

2) $[G(x)_\alpha, G(x)_\beta] \subset G(x)_{\alpha+\beta}$

3) $G(x)_0$ ist eine Unteralg von G.

Bew

2) Durch Ind nach m zeigt man

$$(\mathrm{ad}(x) - \alpha - \beta)^m [y,z]$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} [(\mathrm{ad}(x)-\alpha)^k y, (\mathrm{ad}(x) - \beta)^{m-k} z]$$

Für $y \in G(x)_\alpha$, $z \in G(x)_\beta$ folgt

$$(\mathrm{ad}(x) - \alpha - \beta)^m [y,z] = 0$$

für $m \gg 0$. Also ist $[y,z] \in G(x)_{\alpha+\beta}$

3) folgt aus 2)

$\square$

Theorem

Sei x regulär. Dann ist

$$G(x)_0 = \{ y \in G \mid ad(x)^m y = 0 \text{ für } m \gg 0 \}$$

eine Cartan Unteralg von G. Die Dimension von $G(x)_0$ ist gleich dem Rang von G.

Bew

Es ist klar, daß $\dim G(x)_0 = \ell$.

Wir zeigen, daß $G(x)_0$ nilpotent ist.

Def

$$U = \{ y \in G(x)_0 \mid ad(y)|_{G(x)_0} \text{ ist nicht nilp.} \}$$

$$= \{ y \in G(x)_0 \mid (ad(y)|_{G(x)_0})^e \neq 0 \}$$

$$V = \{ y \in G(x)_0 \mid \text{die von } ad(y) \text{ ind Abb auf } G/G(x)_0 \text{ ist invertierbar} \}$$

$$= \{ y \in G(x)_0 \mid \det(ad(y)|_{G/G(x)_0}) \neq 0 \}$$

Es reicht z.z. daß $U = \emptyset$.

U und V sind offen in $G(x)_0$, da ihre Komplemente in $G(x)_0$ durch Polynome auf $G(x)_0$ beschrieben werden.

Der Kern von $ad(x)$ liegt in $G(x)_0$. Also ist $ad(x)$ inv auf $G/G(x)_0$ und

$x \in V$. Da $G(x)_0$ irred ist, ist V dicht in $G(x)_0$.

Falls $U \neq \emptyset$, dann ist $U \cap V \neq \emptyset$.

Angenommen $y \in U \cap V$. // 27.4.09

Aus $y \in U$ folgt, daß der Eigenwert 0 von $ad(y)|_{G(x)_0}$ verallgem Multiplizität $< l$ hat.

Aus $y \in V$ folgt, daß 0 nicht Eigenwert von $ad(y)|_{G/G(x)_0}$ ist.

Der Eigenwert 0 von $ad(y)$ hat also verallgem Mult $< l$, i.e. $\dim G(y)_0 < l$. Das widerspricht der Def vom Rang.

Also ist $u = \emptyset$ und $G(x)_0$ nilpotent.

$G(x)_0$ ist selbstnormalisierend:

Sei $z \in N_G(G(x)_0)$. Dann ist

$$\mathrm{ad}(z)\, G(x)_0 \subset G(x)_0$$

und

$$[z, x] \in G(x)_0$$

d.h.

$$\mathrm{ad}(x)^m\, [z, x] = 0$$

für $m \gg 0$ und somit

$$\mathrm{ad}(x)^{m+1}\, z = 0$$

d.h. $z \in G(x)_0$.

$\square$

3.5 Konjugiertheit von Cartan Unteralgebren

Sei D eine nilpotente Derivation auf G. Dann ist

$$\exp(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}$$

ein Automorphismus von G.

Die Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ erzeugt von den Elementen $\exp(\mathrm{ad}(x))$, $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent wird als <u>innere Automorphismengruppe</u> von G bezeichnet.

Theorem

Die inneren Automorphismen operieren transitiv auf den Cartan Unteralg von G

Korollar

Die Dimension einer Cartan Unter-alg von G ist gleich dem Rang von G

Ist Θ ein Automorphismus von G und $x \in G$ so gilt

$$\Theta\, G(x)_\alpha = G(\Theta x)_\alpha$$

Es folgt

Korollar

Jede Cartan Unteralg von G ist der Form $G(x)_0$ für ein geeignetes reguläres x in G.

3.6 Der halbeinfache Fall

Sei $X \subset G$. Dann ist der Zentralisator von X

$$Z_G(X) = \{ y \in G \mid [y, x] = 0 \quad \forall_{x \in X} \}$$

eine Unteralg von G.

Theorem

Sei G halbeinfach und H eine Cartan Unteralg von G. Dann

1) H ist abelsch
2) H ist selbstzentralisierend
3) Jedes Element ist halbeinfach
4) Die Killing Form ist nicht ausgeartet auf H.

Bew

4) Es gibt ein reg Element $x \in G$ mit $H = G(x)_0$. Dann ist

$$G = G(x)_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} G(x)_\alpha$$

Für $y \in G(x)_\alpha$, $z \in G(x)_\beta$ gilt

$$ad(y)\, ad(z)\, G(x)_\gamma \subset G(x)_{\alpha+\beta+\gamma}$$

Folglich ist

$$K(y,z) = tr(ad(y)\,ad(z)) = 0$$

wenn $\alpha + \beta \neq 0$.

Da K nicht ausg ist, paart K den Raum $G(x)_\alpha$ nicht ausg mit $G(x)_{-\alpha}$. Insbesondere ist K nicht ausgeartet auf $H = G(x)_0$.

1) Da H nilp ist, gilt dies auch für ad(H). Anwendung des Cartan Krit auf $ad(H) \subset gl(H)$ zeigt

$$K(x,y) = tr(ad(x)\,ad(y)) = 0$$

für alle $x \in [H,H]$, $y \in H$

Also ist $[H, H]$ orth zu H. Da K nicht ausg auf H ist, folgt $[H, H] = 0$.

2) H abelsch impliziert $H \subset Z_G(H)$. Wegen $Z_G(H) \subset N_G(H) = H$ folgt $H = Z_G(H)$.

3) Sei $x \in H$ und $s + n$ die Zerlegung von x in nilp und halbeinf Anteil. Für $y \in H$ ist $[x, y] = 0$ und somit $[y, s] = [y, n] = 0$, d. h. $s, n \in Z_G(H) = H$. Da $ad(y)$ und $ad(n)$ kommutieren und $ad(n)$ nilpotent ist, ist $ad(y) ad(n)$

nilpotent. Also ist $K(y, n) = tr(ad(y) ad(n)) = 0$, d.h. n ist orth zu H bezgl K. Also ist $n = 0$ und x halbeinfach

$\square$

Da H selbstzentralisierend ist, folgt

<u>Korollar</u>

H ist maximal abelsche Unteralg von G.

<u>Korollar</u>

Jedes reguläre Element in G ist halbeinfach.

Bew

Das liegt daran, daß jedes reg Element in einer Cartan Unteralg enthalten ist.

Man kann zeigen, daß jede max abelsche Unteralg, die nur aus halbeinf Elementen besteht, eine Cartan Unteralg von G ist