2. Halbeinfache Lie Alg

In diesem Abschnitt ist G eine endlich-dimensionale Lie Alg über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$.

2.1 Definition

Da die Summe zweier auflösbarer Ideale in G wieder ein auflösbares Ideal ist, besitzt G ein auflösbares Ideal I, welches alle auflösbaren Ideale enthält. I heißt <u>Radikal</u> von G.

G heißt <u>halbeinfach</u>, wenn sein Radikal trivial ist.

G ist also genau dann halbeinfach

wenn G keine abelschen Ideale
ungleich 0 besitzt.

<u>Bsp</u>

1) Sei V ein endlich dim Vektor-
raum über K. Dann ist $sl(V)$ halb-
einfach.

2) Ist G einfach, so auch halb-
einfach.

2.2 Cartans Kriterium

Wir def eine Bilinearform auf G
durch

$$K(x,y) = tr(ad(x)\,ad(y))$$

Diese Form heißt <u>Killing Form</u>

Sie ist symmetrisch und invariant, d.h.

$$K(x,y) = K(y,x)$$

$$K([x,y],z) = K(x,[y,z])$$

<u>Satz</u>

Sei I ein Ideal in G. Dann ist die Killing Form von I gegeben durch $K|_{I \times I}$.

Aus der Invarianz folgt

<u>Satz</u>

Sei I ein Ideal in G. Dann ist auch $I^\perp$ ein Ideal in G.

Somit ist das Radikal von K

$$S = \{ x \in G \mid K(x,y) = 0 \ \forall_{y \in G} \} = G^{\perp}$$

ein Ideal in G. K heißt <u>nicht ausgeartet</u>, wenn S trivial ist.

<u>Theorem</u> (Cartan-Killing)

G ist genau dann halbeinfach, wenn K nicht ausgeartet ist.

<u>Bew</u>

„ ⟹ "

Sei G halbeinfach. S ist ein Ideal in G und

$$K(x,y) = tr(ad(x)\, ad(y)) = 0$$

für alle $x \in S$, $y \in [S,S]$. Nach dem Cartan Kriterium ist somit $ad(S) = S/_{Z(S)}$ auflösbar. Da $Z(S)$ auflösbar ist, folgt, daß S auflösbar ist und somit $S \subset rad(G) = 0$.

„$\Leftarrow$"

Sei $S = 0$. Sei I ein abelsches Ideal in G. Für $x \in I$ und $y \in G$ ist

$$G \xrightarrow{ad(y)} G \xrightarrow{ad(x)} I \xrightarrow{ad(y)} I \xrightarrow{ad(x)} [I,I] = 0$$

so daß

$$(ad(x)\, ad(y))^2 = 0.$$

$ad(x)\, ad(y)$ ist also nilpotent und

somit $tr(ad(x)\, ad(y)) = K(x,y) = 0$.

Also $I \cap S = 0$, d.h. G ist halbein-fach.

$\square$

2.3 Zerlegung in einfache Komp.

Satz

Sei G halbeinfach und I ein Ideal in G. Dann sind I und $I^\perp$ halbeinfache Ideale und

$$G = I \oplus I^\perp$$

mit $[I, I^\perp] = 0$

Bew

Die Abb

$$\begin{aligned} G/_{I^\perp} &\longrightarrow I^* \\ x + I^\perp &\longmapsto K(x, \ ) \end{aligned}$$

ist injektiv ($K(x,y) = 0 \ \forall_{y \in I}$ impliziert $x \in I^\perp$).

Somit ist

$$\dim G \leq \dim I + \dim I^\perp \quad x_1$$

$I \cap I^\perp$ ist ein Ideal in G. Seien $x, y \in I \cap I^\perp$ und sei $z \in G$. Dann ist

$$K([x,y], z) = K(x, [y,z]) = 0$$

und somit $[x,y] = 0$, d.h

x_1 Da die Abb $I \longrightarrow (G/_{I^\perp})^*$, $x \longmapsto K(x, \ )$ inj ist, gilt sogar Gleichheit

$I \cap I^\perp$ ist ein abelsches Ideal in G. Somit ist $I \cap I^\perp = 0$.

Es folgt $G = I \oplus I^\perp$. Die übrigen Beh sind klar.

□

<u>Theorem</u>

G ist genau dann halbeinfach, wenn G isomorph zur Summe einfacher Lie Alg ist.

<u>Bew</u>

„$\Longrightarrow$"

Sei G halbeinfach. Wir beweisen die Beh durch Ind über $\dim G$.

Falls $\dim G = 1$ so ist G abelsch und nicht halbeinfach.

Sei $\dim G \geq 2$. Falls G einfach ist, sind wir fertig. Ist G nicht einfach, so wählen wir ein Ideal I mit der kleinsten pos. Dimension. Dann ist $G = I \oplus I^{\perp}$ und I und $I^{\perp}$ sind halbeinfach. Nach Induktionshyp zerfallen I und $I^{\perp}$ in einfache Ideale. Da die Ideale von I auch Ideale von G sind und entsprechend für $I^{\perp}$, ist I einfach und $I^{\perp}$ zerfällt in einfache Ideale von G.

„$\Leftarrow$"

Sei $G = G_1 \oplus .. \oplus G_n$ die direkte Summe einfacher Lie Alg.
Sei x im Radikal der Killing Form von G und $y \in G$. Schreibe
$x = x_1 + .. + x_n$ mit $x_i \in G_i$ und
$y = y_1 + .. + y_n$ mit $y_i \in G_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= K(x,y) \\ &= tr(ad(x)\, ad(y)) \\ &= \sum_{i,j} tr(ad(x_i)\, ad(y_j)) \end{aligned}$$

$$= \sum_i tr(ad(x_i)\, ad(y_i))$$

weil $ad(x_i)\, ad(y_j) = 0$ für $i \neq j$

$$= \sum_i K(x_i, y_i)$$

$$= \sum_i K_i(x_i, y_i)$$

wobei K_i die Killing Form von G_i bez. Es folgt

$$K_i(x_i\, y_i) = 0$$

für alle $y_i \in G_i$. Also $x_i = 0$.

Somit ist $x = 0$ und K nicht ausgeartet.

$\square$

Man zeigt leicht, daß die Zerlegung einer halbeinfachen Lie Alg in einfache Komp bis auf Reihenfolge eindeutig ist.

2.4 Derivationen

Eine Derivation D auf G heißt innere Derivation, wenn $D = ad(x)$ für ein $x \in G$.

Theorem

Jst G halbeinfach, so ist jede Derivation auf G innere Derivation.

2.5 Halbeinfache und nilpotente Elemente

Sei G halbeinfach und $x \in G$.

x heißt <u>nilpotent</u>, wenn $ad(x)$ nilpotent ist.

x heißt <u>halbeinfach</u>, wenn $ad(x)$ halbeinfach ist (d.h. diagonalisierbar nach Erweiterung des Grundkörpers).

<u>Theorem</u>

Sei G eine <u>halbeinfache</u> Lie Alg. Dann kann jedes $x \in G$ <u>eindeutig</u> geschrieben werden als $x = s + n$

mit n nilpotent, s halbeinfach und $[s,n]=0$. Jedes $y \in G$, das mit x kommutiert, kommutiert auch mit n und s.

n heißt die nilpotente und s die halbeinfache Komp von x.

Theorem

Sei G eine halbeinfache Lie Alg und $\varphi: G \longrightarrow gl(V)$ eine endlich-dim Darst. Ist x halbeinfach (resp. nilpotent) so gilt dies auch für $\varphi(x)$.

//

24.4.09

2.6 Vollständige Reduzierbarkeit

Sei G eine Lie Alg und V ein Vektorraum mit einer bilinearen Abb

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (x,v) &\longmapsto x.v \end{aligned}$$

V heißt <u>G-Modul</u> wenn

$$[x,y].v = x.y.v - y.x.v$$

für alle $x,y \in G$, $v \in V$.

Eine Darstellung $\varphi : G \longrightarrow gl(V)$ def eine Modulstruktur auf V durch

$$x.v = \varphi(x)v$$

Umgekehrt liefert so jeder Modul

eine Darstellung

Eine Abb zwischen G-Moduln
$f : V \to W$ heißt <u>Homomorphismus</u>,
wenn

$$f(x.v) = x.f(v)$$

Ein G-Modul V heißt <u>irreduzibel</u>,
wenn $V \neq 0$ und V keine nichttriv
Untermoduln hat.

V heißt <u>vollständig reduzibel</u>,
wenn V in irreduzible Untermod
zerfällt.

<u>Lemma</u> (Schur)

Sei G eine Lie Alg über einem alg. abgeschlossenem Körper K und $\varphi : G \to gL(V)$ eine endlich dim irred Darst von G. Dann sind die einzigen Endomorphismen von V, die mit allen $\varphi(x)$ kommutieren, die Skalare.

<u>Bew</u>

Sei T eine lin. Abb auf V mit $[T, \varphi(x)] = 0$ für alle $x \in G$. Da K alg abgeschlossen ist, gibt es ein

$\lambda \in K$ und ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit

$$Tv = \lambda v.$$

Sei W der Untermodul in V erzeugt von v. Als Vektorraum wird W erzeugt von v und den Elementen der Form $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) v$

Dann ist $W \neq 0$ so daß $V = W$.

Aus $Tv = \lambda v$ und $[T, \varphi(x)] = 0$ für alle $x \in L$ folgt dann $T = \lambda \, Id$.

$\square$

Seien V, W G-Moduln. Dann ist $V \oplus W$ ein G-Modul unter

$$x.(v+w) = x.v + x.w$$

und $V \otimes W$ ist ein G-Modul unter

$$x.(v \otimes w) = x.v \otimes w + v \otimes x.w$$

Der Raum $\mathrm{Hom}(V,W)$ der lin Abb von V nach W ist ein G-Modul unter

$$(x.f)(v) = x.(f(v)) - f(x.v)$$

Ist W ein Untermodul von V, so ist V/W ein G-Modul unter

$$x.(v+w) = x.v + w$$

Theorem (Weyl)

Sei G eine endlich dim halbeinfache Lie Alg über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$.

Sei V ein endlich dim G-Modul.
Dann ist V vollständig reduzibel.