Eric [illegible]

Einleitung

Sei G eine endlich dim einfache Lie Alg über $\mathbb{C}$. Dann kann G eine Matrix A, die sog. Cartan Matrix, zugeordnet werden. G ist durch diese Matrix eindeutig festgelegt, denn G kann mit Hilfe der Serre Konstruktion aus A rekonstruiert werden. Erlaubt man in der Serre Konst allgemeinere Matrizen, so erhält man Kac-Moody Alg. Nach einem kurzen Abriss der endlich dim Theorie werden wir die Theorie dieser Lie alg studieren.

Literatur

1) Serre, Complex semisimple Lie alg, Springer
2) Humphreys, Introduction to Lie alg and representation theory, Springer
3) Kac, Infinite dim Lie alg, Cambridge
4) Carter, Lie alg of finite and affine type, Cambridge

Endlich dim Lie alg

1. Grundlagen

1.1 Definition und Beispiele

Sei G ein Vektorraum über K mit einer bilinearen Abb

$$[\,,\,] : G \times G \longrightarrow G$$

G wird als Lie Alg bez wenn

1) $[x, x] = 0$

2) $[x [y, z]] + [y [z, x]] + [z [x, y]] = 0$

für alle $x, y, z \in G$.

Falls char(K) $\neq 2$ so ist 1) äquivalent zu $[x,y] = -[y,x]$.

Bsp

1) Sei V ein Vektorraum über K. Dann ist End(V) eine Lie Alg unter

$$[x,y] = xy - yx$$

Diese Lie Alg wird mit $gl(V)$ bez.

2) Sei $\dim V < \infty$. Dann ist

$$sl(V) = \{x \in gl(V) \mid tr(x) = 0\}$$

eine (Lie) Unteralg von $gl(V)$.

3) Sei V ein endlich dim Vektor-

raum über K mit einer <u>nicht aus-</u>
<u>gearteten</u> <u>symmetrischen</u> Bilinearform
$(,) : V \times V \longrightarrow K$. Zu $x \in End(V)$
gibt es ein eindeutiges Element $x^T \in$
$End(V)$ mit $(xv, w) = (v, x^T w)$
für alle $v, w \in V$.

$$o(V) = \{ x \in gl(V) \mid x = -x^T \}$$

ist eine Unteralg von $gl(V)$ und
wird als <u>orth</u> Lie Alg über V
bez.

4) Sei V ein endlich dim Vektor-
raum über K mit einer nicht aus-

gearteten <u>symplektischen</u> Bilinear-
form $(,) : V \times V \longrightarrow K$, i.e.
$(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Für $x \in End(V)$
bezeichne x^T die transponierte Abb
bzgl $(,)$. Dann ist

$$sp(V) = \{ x \in gl(V) \mid x = -x^T \}$$

eine Unteralg von $gl(V)$. Diese
Lie Alg wird als <u>symplektische</u>
Lie Alg über V bez.

5) Sei V ein Vektorraum der Dim
n. Eine <u>Flagge</u> D in V ist eine
aufsteigende Kette von Unterräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

mit $\dim V_i = i$.

$$n(D) = \{ x \in gl(V) \mid x.V_i \subset V_{i-1} \}$$

$$b(D) = \{ x \in gl(V) \mid x.V_i \subset V_i \}$$

sind Unteralg von $gl(V)$.

6) Sei A eine nicht notwendig assoziative Alg über K. Eine lin Abb $D : A \longrightarrow A$ heißt <u>Derivation</u> wenn $D(xy) = x(Dy) + (Dx)y$ für alle $x, y \in A$. Sind D_1, D_2 Derivationen auf A, so auch $[D_1, D_2] =$

$D_1 D_2 - D_2 D_1$, d.h. der Raum

$\mathrm{Der}(A)$ ist eine Unteralg von $gl(A)$.

1.2 Ideale und Homomorphismen

Sei G eine Lie Alg.

Ein Unterraum $I \subset G$ heißt Ideal, wenn

$$[x, y] \in I$$

für alle $x \in I$, $y \in G$.

Bsp

1) Das Zentrum $Z(G) = \{x \in G \mid [x, y] = 0 \ \forall_{y \in G}\}$ ist ein Ideal in G.

2) Sind I, J Ideale in G, so auch

$$I + J = \{ x + y \mid x \in I,\ y \in J \}$$

$$[I, J] = \{ \sum [x_i, y_i] \mid x_i \in I,\ y_i \in J \}$$

G heißt <u>einfach</u>, wenn G keine nichttriv. Ideale hat und G nicht abelsch ist.

Ist I ein Ideal in G, so ist $G/_I$ eine Lie Alg unter

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I$$

Seien G und L Lie Alg. Eine Lin Abb $\phi : G \longrightarrow L$ heißt Homomor phismus, wenn

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

für alle $x, y \in G$. In diesem Fall ist $\mathrm{Ker}(\phi)$ ein Ideal in G.

Es gelten die üblichen Homomorphie-sätze.

Eine Darstellung von G über einem Vektorraum V ist ein Hom

$$\phi : G \longrightarrow gl(V)$$

Für $x \in G$ ist

$$\mathrm{ad}(x) : G \longrightarrow G$$
$$y \longmapsto [x,y]$$

eine Derivation. Die Abb

$$\mathrm{ad} : G \longrightarrow \mathrm{Der}(G)$$
$$x \longmapsto \mathrm{ad}(x)$$

wird als <u>adjungierte Darst</u> bez.

Es ist $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = Z(G)$.

1.3 Nilpotente Lie Alg

Sei G eine Lie Alg.

Die <u>absteigende zentrale Reihe</u> ist def durch

$$C^1(G) = G$$

$$C^n(G) = [G, C^{n-1}(G)] \quad \text{für } n \geq 2$$

Dann ist

$$C^1(G) \supset C^2(G) \supset \ldots$$

eine absteigende Kette von Idealen

G heißt <u>nilpotent</u>, wenn $C^n(G) = 0$ für ein n.

<u>Bsp</u>

Sei D eine Flagge in V. Dann ist n(D) nilpotent.

<u>Satz</u>

Sei G eine Lie Alg. Dann

1) Jst G nilpotent, so auch die Unteralg und homomorphen Bilder von G.

2) Jst $G/_{Z(G)}$ nilpotent, so auch G

3) Jst $G \neq 0$ nilpotent, so gilt $Z(G) \neq 0$

<u>Theorem</u> (Engel)

Sei G eine endlich dim Lie Alg, $V \neq 0$ ein endlich dim Vektorraum und $\phi : G \longrightarrow gL(V)$ eine Darst von G.

Sei $\phi(x)$ <u>nilpotent</u> für alle $x \in G$.

Dann gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit

$$\phi(x)\, v = 0$$

für alle $x \in G$.

Es folgt

Theorem

Sei G eine endlich dim Lie Alg.

Dann ist G genau dann nilp wenn $ad(x)$ für alle $x \in G$ nilp ist.

1.4 Auflösbare Lie Alg

Sei G eine Lie Alg.

Die abgeleitete Reihe von G ist def durch

$$D^1(G) = G$$

$$D^n(G) = [D^{n-1}(G), D^{n-1}(G)]$$

für $n \geq 2$

Dann ist

$$D^1(G) \supset D^2(G) \supset \dots$$

eine absteigende Kette von Idealen

G heißt <u>auflösbar</u>, wenn $D^n(G) = 0$ für ein n.

<u>Bsp</u>

1) Jede nilpotente Lie Alg ist auflösbar

2) Sei D eine Flagge in V. Dann ist $b(D)$ auflösbar

<u>Satz</u>

Sei G eine Lie Alg.

1) Ist G auflösbar, so auch alle Unteralg und homomorphen Bilder von G

2) Sei I ein auflösbares Ideal in G, so daß L/I auflösbar ist.

Dann ist L auflösbar.

3) Sind I und J auflösbare Ideale in G, so ist auch $I+J$ auflösbar.

<u>Theorem</u> (Lie)

Sei G eine <u>endlich dim</u> Lie Alg über einem <u>alg abgeschlossenem</u> Körper K mit <u>$char(K)=0$</u>, <u>$V\neq 0$</u> ein <u>endlich dim</u> Vektorraum über K und $\phi: G \to gl(V)$ eine Darst von G. Ist G <u>auflösbar</u>, so gibt es ein $v \in V\setminus\{0\}$ mit

$$\phi(x)v = \lambda(x)v$$

für alle $x \in G$.

Bew

Durch Ind über dim G.

Die Fälle $\dim G = 0$ und $\dim G = 1$

sind klar.

Sei $\dim G \geq 2$

1) Konstruktion eines Ideals M

in G mit Kodim 1

Da G auflösbar ist, gilt $[G,G] \subsetneq G$

Die Lie Alg $G/_{[G,G]}$ ist abelsch

Sei $\pi : G \longrightarrow G/_{[G,G]}$ die nat

Proj. Sei N ein Unterraum mit

Kodim 1 in $G/_{[G,G]}$. Dann ist

$M = \pi^{-1}(N)$ ein Ideal in G mit

Kodim 1

(Aus $Ker(\pi) = [G,G] \subset M$ folgt

$$\dim M = \dim N + \dim Ker\, \pi|_M$$
$$= \dim N + \dim [G,G]$$
$$= \dim G - 1 \quad)$$

2) Nach Induktionsannahme gibt es einen gemeinsamen Eigenvektor $v \neq 0$ für die Operation von M (M ist auflösbar) Es ist

$$\phi(x) v = \lambda(x) v \quad \forall_{x \in M}$$

für eine lin ~~Abb~~ $\lambda : M \longrightarrow K$. Def

$$W = \{ w \in V \mid \phi(x) w = \lambda(x) w \quad \forall_{x \in M} \} \neq 0$$

3) G läßt W invariant:

Sei $x \in G$ und $w \in W$. Dann ist $\phi(x) w \in W$ genau dann wenn

$$\phi(y)\,\phi(x)\,w = \lambda(y)\,\phi(x)\,w \quad \forall_{y \in M}$$

bzw.

$$\lambda(\underbrace{[x, y]}_{\in M}) = 0 \quad \forall_{y \in M}$$

weil

$$\begin{aligned}\phi(y)\,\phi(x)\,w &= [\phi(y), \phi(x)]\,w \\ &\quad + \phi(x)\,\phi(y)\,w \\ &= \phi([y, x])\,w \\ &\quad + \lambda(y)\,\phi(x)\,w\end{aligned}$$

$$= \lambda([y,x])w + \lambda(y)\phi(x)w$$

// 15.4.09

Wir zeigen

$$\lambda([x,y]) = 0$$

Sei $w \neq 0$. Def $W_0 = 0$ und W_i als den Vektorraum erzeugt von

$$w, \phi(x)w, \ldots, \phi(x)^{i-1}w$$

für $i \geq 1$. Sei $n > 0$ die kleinste Zahl, so daß die Vektoren

$$w, \phi(x)w, \ldots, \phi(x)^n w$$

lin abh. sind. Dann ist

$$\dim W_n = n$$

$$W_{n+i} = W_n \quad \text{für } i \geq 0$$

$$\phi(x) W_n \subset W_n$$

Durch Ind über i zeigt man

$$\phi(y) W_i \subset W_i \quad \forall_{y \in M}$$

Sei $y \in M$. Dann gilt

$$\phi(y)\, \phi(x)^i w = \lambda(y)\, \phi(x)^i w \mod W_i$$

(Bew wieder durch Ind über i)

Bzgl der Basis $w, \phi(x) w, \ldots, \phi(x)^{n-1} w$ von W_n ist $\phi(y)$ also obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen

$\lambda(y)$. Also

$$\operatorname{tr}\left(\phi(y)|_{W_n}\right) = n\,\lambda(y)$$

Insbesondere gilt die Formel für Elemente der Form $[x,y]$ mit $y \in M$.

Da $\phi(x)$ und $\phi(y)$ den Raum W_n invariant lassen, ist $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ der Kommutator zweier Endomorphismen von W_n. Also

$$0 = \operatorname{tr}\left(\phi([x,y])|_{W_n}\right) = n\,\lambda([x,y])$$

und somit

$$\lambda([x,y]) = 0.$$

4) Sei $x \in G$ mit $G = M + Kx$. G operiert auf W. Finde einen Eigenvektor v von $\phi(x)$ in W. Dann ist v gemeinsamer Eigenvektor für die Operation von G auf V (und λ kann auf G fortgesetzt werden).

$\square$

<u>Theorem</u> (Cartan)

Sei V ein endlich dim Vektorraum über K mit $\mathrm{char}(K) = 0$ und G

eine Unteralg von $gl(V)$. Dann:

G ist genau dann auflösbar wenn

$$\mathrm{tr}(xy) = 0$$

für alle $x \in G$, $y \in [G, G]$.