9 Affine Kac-Moody Alg

In diesem Kapitel geben wir eine Realisierung der ungetwisteten affinen Kac-Moody Alg an

9.1 Zentrale Erweiterungen

Seien G und C Lie Alg. Eine zentrale Erweiterung von G durch C ist eine exakte Seq von Lie Alg

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

(d.h. i ist ein inj Lie Alg Hom, π surj und $\mathrm{Ker}(\pi) = i(C)$.)

so daß $i(C)$ im Zentrum von

von E liegt.
(C ist also abelsch.)

Sei

$$0 \to C \to E \to G \to 0$$

eine zentrale Erweiterung. Wähle einen Unterraum $G' \subset E$ so daß $\pi : G' \to G$ ein Isomorphismus ist und sei $f : G \to G'$ die Umkehrabb. Dann ist für $x, y \in G$

$$\pi\left(f([x,y]) - [f(x), f(y)] \right) = 0$$

(G' ist i.a. keine Lie Alg und f kein Lie Alg Hom) und

$$\alpha(x,y) := i^{-1}\{f([x,y])$$
$$- [f(x), f(y)]\} \in C$$

Wir erhalten so eine Abb

$$\alpha : G \times G \longrightarrow C$$

mit

1) $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$

2) $\alpha(x,[y,z]) + \alpha(y,[z,x])$
$$+ \alpha(z[x,y]) = 0$$

Eine solche Abb bezeichnet man als <u>2-Kozykel</u>. Eine zentrale

Erweiterung liefert also einen 2-Kozykel.

Es gilt auch die Umkehrung. Sei G eine Lie Alg, C ein Vektorraum und $\alpha : G \times G \longrightarrow C$ ein 2-Kozykel

Def $E = G \oplus C$ und

$$[x+a, y+b] = [x,y] + \alpha(x,y)$$

für $x,y \in G$, $a,b \in C$. Dann ist

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

eine zentrale Erweiterung von G durch C.

9.2 Ungetwistete affine Kac-Moody Alg

Sei $A = X_l$ eine unzerlegb. verallgem Cartan Matrix vom endl. Typ mit Rang l und $\hat{A} = X_l^{(1)}$ die zugehörige affine Matrix.

$G = G(A)$ ist eine endlich-dim einfache Lie Alg. Sei $(,)$ eine inv nichtausg sym Bilinear-form auf G.

Sei $L = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ die Alg der Laurent Polynome. Die Schleifen Alg ist

ist def als

$$L(G) = L \otimes_{\mathbb{C}} G$$

$L(G)$ ist eine Lie Alg unter

$$[t^m \otimes x, t^n \otimes y] = t^{m+n} \otimes [xy]$$

Wir erweitern die Bilinearform auf $L(G)$ durch

$$(t^m \otimes x, t^n \otimes y) = \delta_{m+n}(xy)$$

und wir def eine Derivation d auf $L(G)$ durch

$$d(t^m \otimes x) = m t^m \otimes x$$

Also $d = t\frac{d}{dt}$.

Wir konst nun eine 1-dim zentrale Erweiterung von $L(G)$.

$$\Psi : L(G) \times L(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\xi, \eta) \longmapsto (d\xi, \eta)$$

ist ein 2-Kozykel auf $L(G)$.

Es gilt

$$\Psi(t^m \otimes x, t^n \otimes y) = m\,\delta_{m+n}\,(x, y)$$

Sei $\hat{L}(G) = L(G) \oplus \mathbb{C}c$ die zentrale Erweiterung zu Ψ, d.h.

$$[\xi + \lambda c, \eta + \mu c] = [\xi, \eta] + \varphi(\xi, \eta) c$$

c heißt <u>zentrales Element</u>

Wir setzen d auf $\hat{L}(G)$ fort durch

$dc = 0$.

Im letzten Schritt addieren wir die Derivation d. Def

$$\hat{L}(G) = \hat{L}(G) \oplus \mathbb{C} d$$

mit Produkt

$$[\xi + \lambda d, \eta + \mu d]$$
$$= [\xi, \eta] - \mu d\xi + \lambda d\eta$$

Dann ist $\hat{L}(G)$ eine Lie Alg.

Also

$$\hat{L}(G) = L(G) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

mit

$$[t^m \otimes x + \lambda_1 c + \lambda_2 d, t^n \otimes y + \mu_1 c + \mu_2 d]$$

$$= t^{m+n} \otimes [x,y] + m\,\delta_{m+n}(x,y)c$$

$$- \mu_2 m t^m \otimes x + \lambda_2 n t^n \otimes y$$

// 6.7.09

Theorem

$\hat{L}(G)$ ist isomorph zu $G(\hat{A})$.

Bew

In mehreren Schritten

1) Sei H eine Cartan Unteralg von G, Δ das zugehörige Wurzelsystem und $G = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$ die Wurzelraum-zerlegung von G. Die und nicht aus-geartete sym Bilinearform $(\,,\,)$ auf G induziert einen Isom

$$\begin{aligned} \vartheta : H &\longrightarrow H^* \\ h &\longmapsto (h,\ ) \end{aligned}$$

Für eine Wurzel α def wir

$$h_\alpha = \frac{2\vartheta^{-1}(\alpha)}{\alpha^2}$$

und

$$h_i = h_{\alpha_i}$$

für $i=1,\dots,\ell$. Wähle $e_i \in G_{\alpha_i}$, $f_i \in G_{-\alpha_i}$ mit $(e_i f_i) = \frac{2}{\alpha_i^2}$. Dann ist

$$[e_i f_i] = (e_i f_i)\,\nu^{-1}(\alpha_i) = h_i$$

Es gibt eine eindeutige Wurzel θ mit $\theta \geq \alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$, d.h. $\theta - \alpha = \sum K_i \alpha_i$ wobei alle $K_i \geq 0$ sind (vgl Aufgabe 32, Blatt 5).
θ wird als höchste Wurzel bez.
Wähle $e_\theta \in G_\theta$, $f_\theta \in G_{-\theta}$ so daß

so H^* mit einem Unterraum von $\hat{H}^*$. Wir def ein lin Fkt S auf H durch

$$S|_{H \otimes \mathbb{C}c} = 0$$

$$S(d) = 1$$

3) Serre

$$e_0 = t \otimes f_\theta$$

$$f_0 = t^{-1} \otimes e_\theta$$

Dann ist

$$[e_0, f_0] = 1 \otimes [f_\theta, e_\theta] + (f_\theta, e_\theta)\, c$$

$$= -h_\theta + \frac{2}{\theta^2}\, c$$

$$(e_\theta, f_\theta) = \frac{2}{\theta^2}$$

Dann ist

$$[e_\theta, f_\theta] = h_\theta$$

2) $1 \otimes G$ ist eine Lie Unteralg von $\hat{L}(G)$. Wir ident G mit dieser Unteralg.

$$\hat{H} = H \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

ist eine $l+2$-dim abelsche Unteralg von $\hat{L}(G)$.

Wir setzen $\lambda \in H^*$ fort durch $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$ und ident

Da Θ die höchste Wurzel ist, gilt

$$[e_0, f_i] = [t \otimes f_\Theta, 1 \otimes f_i]$$
$$= t \otimes [f_\Theta, f_i] = 0$$

für $i > 0$ und analog

$$[f_0, e_i] = 0$$

für $i > 0$.

4) Setze

$$\alpha_0 = \delta - \Theta$$
$$h_0 = \frac{2}{\Theta^2} c - h_\Theta$$

Dann ist

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$$

$$[h, e_i] = \alpha(h) e_i$$

$$[h, f_i] = -\alpha(h) f_i$$

für $i, j = 0, \dots, e$ und $h \in \hat{H}$.

5) Seien

$$\hat{\pi} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_e\}$$

$$\hat{\pi}^\vee = \{h_0, \dots, h_e\}$$

Dann ist $(\hat{H}, \hat{\pi}, \hat{\pi}^\vee)$ eine Realisierung von $\hat{A}$.

6) Sei

$$\hat{\Delta} = \{ \gamma + j\delta \mid \gamma \in \Delta , \ j \in \mathbb{Z} \}$$
$$\cup \{ j\delta \mid j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$$

Dann ist $\hat{\Delta}$ das Wurzelsystem von $\hat{L}(G)$ bzgl $\hat{H}$, i.e.

$$\hat{L}(G) = \hat{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \hat{\Delta}} \hat{L}(G)_\alpha$$

mit

$$\hat{L}(G)_{\gamma + j\delta} = t^j \otimes G_\gamma$$

$$\hat{L}(G)_{j\delta} = t^j \otimes H$$

7) Die Elemente e_i, f_i, $i = 0, \dots, e$ und $h \in H$ erzeugen $\hat{L}(G)$.

Sei M die Unteralg erzeugt von diesen Elementen.

Dann ist $G \subset M$.

Sei

$$I_1 = \{x \in G \mid t \otimes x \in M\}$$

Dann ist $f_0 \in I_1$ und $x \in I_1$, $y \in G$ impliziert

$$t \otimes [x, y] = [\underbrace{t \otimes x}_{\in M}, \underbrace{1 \otimes y}_{\in M}] \in M$$

d.h. I_1 ist ein Ideal in G.

Da G einfach ist, folgt $I_1 = G$.

Also $t \otimes G \subset M$.

Induktiv zeigt man $t^k \otimes G \subset H$ für $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$

Analog $t^{-k} \otimes G \subset H$.

8) Es gibt kein Ideal $\hat{J} \neq 0$ welches $\hat{H}$ trivial schneidet.

9) Die obigen Eigenschaften implizieren, daß $\hat{L}(G)$ iso zu $G(\hat{A})$ ist.

$\square$

<u>Bemerkungen</u>

1) Es ist

$$\hat{\Delta}^{re} = \{ \gamma + j\delta \mid \gamma \in \Delta, j \in \mathbb{Z} \}$$

$$\hat{\Delta}^{im} = \{ j\delta \mid j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$$

Insbesondere haben die imag Wurzeln alle Mult ℓ.

2) $\hat{L}(G)$ wird als affine Lie Alg zu G oder als <u>Affinisierung</u> von G bez.

3) $\mathbb{C}c$ ist das Zentrum von $\hat{L}(G)$

4) Wir können die Bilinearform auf G fortsetzen auf $\hat{L}(G)$ durch

$$(t^m \otimes x, t^n \otimes y) = \delta_{m+n}(x, y)$$

$$(L(G), \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d) = 0$$

$$(c,c) = (d,d) = 0$$

$$(c,d) = 1$$

Dies def eine und nicht ausg sym Bilinearform auf $\hat{L}(G)$.

5) Man bez die affinen Alg mit Cartan Matrizen der Form $X_e^{(2)}$ oder $X_e^{(3)}$ als <u>getwistete affine Alg</u>.

Diese lassen sich als Fixpunkte von Automorphismen auf den ungetwisteten Alg Konst.