8. Reelle und imaginäre Wurzeln

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Wurzelsystem einer Kac-Moody Alg $G(A)$. Im Gegensatz zur endlich-dim Theorie gibt es hier imaginäre Wurzeln

8.1 Reelle Wurzeln

Sei A eine verallgem Cartan Matrix und $G(A)$ die zugehörige Kac-Moody Alg.

Eine Wurzel $\alpha \in \Delta$ heißt <u>reell</u>, wenn es ein $w \in W$ und ein $\alpha_i \in \Pi$

gibt, so daß $\alpha = w(\alpha_i)$. Ansonsten heißt α <u>imaginär</u>.

Es ist

$$\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im}$$

$$\Delta^{re} = \Delta^{re}_+ \cup (-\Delta^{re}_+)$$

$$\Delta^{im} = \Delta^{im}_+ \cup (-\Delta^{im}_+)$$

Sei α eine <u>reelle</u> Wurzel. Schreibe $\alpha = w(\alpha_i)$. Dann ist $w(h_i)$ unabh von der Wahl von w und $\alpha_i \in \Pi$.

Def

$$h_\alpha = w(h_i)$$

Es ist

$$\alpha(h_\alpha) = (w\alpha_i)(wh_i) = \alpha_i(h_i) = 2$$

Für $\alpha \in \Delta^{re}$ def wir

$$w_\alpha : H^* \longrightarrow H^*$$
$$\lambda \longmapsto \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha$$

Dann ist w_α eine Spiegelung und $w_\alpha \in W$. Beachte, daß $w_{\alpha_i} = w_i$.

<u>Satz</u>

Sei $\alpha \in \Delta_+^{re}$. Dann

1) $\mathrm{mult}(\alpha) = 1$

2) $k\alpha \in \Delta$ genau dann wenn $k = \pm 1$

3) Sei $\beta \in \Delta$ und $M = \{ t \in \mathbb{Z} \mid \beta + t\alpha \in \Delta \cup \{0\} \}$. Dann ist

$$H = [p, q] \text{ mit } p \cdot q = \beta(h_\alpha)$$

4) Falls $\pm\alpha \notin \Pi$, so gibt es ein i so daß

$$|ht(w_i(\alpha))| < |ht(\alpha)|$$

Bew

Die Multiplizitäten von $G(A)$ sind inv unter W.

Sei $\alpha = w(\alpha_i)$. Dann

$$\text{mult}(\alpha) = \text{mult}(w(\alpha_i)) = \text{mult}(\alpha_i)$$

$$= \dim G_{\alpha_i} = 1$$

und

$$\text{mult}(k\alpha) = \text{mult}(k\alpha_i)$$

Weiterhin ist

$$M = \{ t \in \mathbb{Z} \mid w^{-1}(\beta) + t\alpha_i \in \Delta \cup \{0\} \}$$

Wegen $\mathrm{mult}(w^{-1}(\beta)) = \mathrm{mult}(\beta) < \infty$

ist $M = [p, q]$ mit

$$p - q = w^{-1}(\beta)(h_i) = \beta(w h_i)$$

$$= \beta(h_\alpha)$$

Für 4) vgl Kac.

□

<u>Satz</u>

Sei A symmetrisierbar und $(\,,\,)$ eine Standardform auf $G(A)$.

Sei $\alpha \in \Delta^{re}$. Dann ist

1) $(\alpha, \alpha) > 0$

2) $$h_\alpha = \frac{2\nu^{-1}(\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

Bew

Sei $\alpha = w(\alpha_i)$. Dann ist

$$(\alpha,\alpha) = (w(\alpha_i), w(\alpha_i)) = (\alpha_i, \alpha_i)$$
$$= a_{ii}/\varepsilon_i > 0$$

Für $h \in H$ gilt

$$\nu(h_\alpha)(h) = \nu(w(h_i))(h)$$
$$= (w(h_i), h)$$
$$= (h_i, w^{-1}(h))$$
$$= \nu(h_i)(w^{-1}(h))$$
$$= \frac{2\alpha_i(w^{-1}(h))}{(\alpha_i \alpha_i)}$$

$$\uparrow$$

$$\nu(h_i) = \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2}$$

$$= \frac{2(w\alpha_i)(h)}{(w\alpha_i, w\alpha_i)} = \frac{2\alpha(h)}{(\alpha,\alpha)} \qquad \square$$

8.2 Imaginäre Wurzeln

Satz

1) Δ_+^{im} ist W-inv

2) Für $\alpha \in \Delta_+^{im}$ gibt es eine eindeutige Wurzel β im W-Orbit von α mit $\beta \in -C^\vee = \{\lambda \in H_{\mathbb{R}}^* \mid \lambda(h_i) \leq 0 \ \forall_i\}$

Bew

1) Es ist $\Delta_+^{im} \subset \Delta_+ \setminus \Pi$. Da $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ inv unter w_i ist und auch Δ^{im}, folgt daß Δ_+^{im} W-inv ist.

2) Sei β ein Element minimaler Höhe in $W.\alpha \subset \Delta_+$. Dann ist

$ht(\beta) \leq ht(w_i(\beta)) = ht(\beta - \beta(h_i)\alpha_i)$

d.h. $\beta(h_i) \leq 0$. Also ist $-\beta \in C^\vee$.

Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß $C^\vee$ ein Fundamentalbereich für die Operation von W auf $X^\vee$ ist.

//

1.7.09

<u>Satz</u>

Sei A symmetrisierbar und $(\,,\,)$ eine Standardform auf $G(A)$.

Eine Wurzel α ist genau dann

imaginär wenn $\alpha^2 \leq 0$.

<u>Bew</u>

Ist $\alpha^2 \leq 0$ so ist α imaginär.

Sei nun α imag. Wir können annehmen, daß $\alpha \in \Delta_+^{im}$. Dann ist $\beta = w(\alpha)$ in $-C^\vee$ für ein $w \in W$.

Schreibe $\beta = \sum k_i \alpha_i$. Dann $k_i \geq 0$ und

$$\alpha^2 = \beta^2 = \sum k_i (\beta, \alpha_i)$$

$$= \sum k_i \beta(\nu^{-1}(\alpha_i))$$

$$= \sum \underbrace{k_i}_{\geq 0} \underbrace{\frac{\alpha_i^2}{2}}_{>0} \underbrace{\beta(h_i)}_{\leq 0} \leq 0$$

weil $v(h_i) = \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2}$.

$\square$

Für $\alpha = \sum k_i \alpha_i \in Q$ ist der <u>Träger</u> von α, geschrieben $\mathrm{supp}(\alpha)$, def als das Unterdiag von $\Gamma(A)$ bestehend aus den Vertices i mit $k_i \neq 0$ und den Kanten, die diese Vertices verbinden.

Ist α eine Wurzel, so ist $\mathrm{supp}(\alpha)$ nach 2.3 <u>zusammenhängend</u>.

Def

$$K = \{ \alpha \in Q_+ \setminus \{0\} \mid \alpha(h_i) \leq 0 \ \forall_i \text{ und } \mathrm{supp}(\alpha) \text{ zshgd} \}$$

Dann ist

<u>Satz</u>

$$\Delta_+^{im} \subset \bigcup_{w \in W} w(K)$$

<u>Bew</u>

Sei $\alpha \in \Delta_+^{im}$. Dann gibt es ein $w \in W$ so daß $(w\alpha)(h_i) \leq 0$ für alle i.

Da $w\alpha$ eine Wurzel ist, ist $\mathrm{supp}(\alpha)$ zshgd. Außerdem ist $w(\alpha)$ pos. Also $w(\alpha) \in K$ bzw $\alpha \in w^{-1}(K)$.

$\square$

Theorem (Kac)

$$\Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} w(K)$$

Satz

Sei $\alpha \in \Delta_+^{im}$ und $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $r\alpha \in Q$. Dann ist $r\alpha \in \Delta^{im}$.

Insbesondere ist $n\alpha \in \Delta^{im}$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Bew

Es reicht die Beh für $r > 0$ zu beweisen.

Es gibt ein $w \in W$ so daß $w(\alpha) \in -C^\vee$.
Dann ist auch $w(r\alpha) \in -C^\vee$.

Aus $\alpha \in \Delta_+^{im}$ folgt $w(\alpha) \subset \Delta_+^{im} \subset Q_+$

$r\alpha \in Q_+$ impliziert $w(r\alpha) \in Q$

Also ist $w(r\alpha) = r\,w(\alpha) \in Q_+ \setminus \{0\}$

α ist Wurzel und somit auch $w(\alpha)$, d.h.

$$\mathrm{supp}(w(r\alpha)) = \mathrm{supp}(w(\alpha))$$

ist zshgd.

Also ist $w(r\alpha) \in K$ bzw.

$r\alpha \in w^{-1}(K) \subset \Delta_+^{im}$.

$\square$

Theorem

Sei A eine unzerlegbare verallgem Cartan Matrix. Dann

1) Ist A vom endl. Typ, so ist

$\Delta^{im} = \{ \}$

2) Ist A affin, so ist

$\Delta^{im}_{+} = \{ m\delta \mid m = 1, 2, \dots \}$

wobei $\delta = \sum c_i \alpha_i$ mit $c_i \in \mathbb{Z}$, $c_i > 0$, $(c_1, \dots, c_n) = 1$ und $Ac = 0$

Während die reellen Wurzeln Mult 1 haben, sind die Mult der imag Wurzeln nur im affinen Fall bekannt. Es gibt keine indef Kac-Moody Alg, für die die Null der imag Wurzeln explizit bekannt sind.