7. Klassifikation verallgemeinerter Cartan Matrizen

Im Folgenden betrachten wir soweit nicht anders angegeben eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ mit den Eigenschaften

M1) A ist unzerlegbar

M2) $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$

M3) $a_{ij} = 0$ impliziert $a_{ji} = 0$

Sei $x = (x_i)$ ein Spaltenvektor. Wir schreiben

$x > 0$ wenn alle $x_i > 0$

$x \geq 0$ wenn alle $x_i \geq 0$

7.1 Vinbergs Theorem

Folgendes Resultat geht auf Vinberg zurück

Theorem

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix mit den Eigenschaften M1), M2), M3).
Dann erfüllt A genau eine der folgenden Bed

(Fin) $\det(A) \neq 0$

$\exists_{u > 0} \; Au > 0$

$Av \geq 0$ impliziert $v > 0$ oder $v = 0$

(Aff) $\operatorname{rang}(A) = n-1$

$\exists_{u>0} \; Au = 0$

$Av \geq 0$ impliziert $Av = 0$

(Ind) $\exists_{u>0} \; Au < 0$

$Av \geq 0$, $v \geq 0$ implizieren

$v = 0$

Korollar

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, die die Bed M1), M2), M3) erfüllt.

Dann

$$A \text{ erfüllt (Fin)} \iff \exists_{u>0} \; Au > 0$$

$$A \text{ erfüllt (Aff)} \iff \exists_{u>0}\ Au = 0$$

$$A \text{ erfüllt (Ind)} \iff \exists_{u>0}\ Au < 0$$

Im zweiten Fall ist u eindeutig bis auf einen Faktor.

Wir sagen, daß eine solche Matrix endl., affinen oder indefiniten Typ hat.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix und $S \subset \{1, \dots, n\}$. Wir def $A_S = (a_{ij})_{i,j \in S}$

<u>Satz</u>

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix mit den Eigenschaften M1), M2), M3)

Angenommen A hat endl. oder aff. Typ. Sei $S \subsetneq \{1, \dots, n\}$. Dann zerfällt A_S in eine direkte Summe von Matrizen endl. Typs.

<u>Bew.</u>

Durch Permutation der Indices können wir annehmen, daß $S = \{1, \dots, m\}$ mit $m < n$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_S & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Angenommen es gibt ein $u > 0$ mit $Au \geq 0$. Wir schreiben $u = \begin{pmatrix} u_S \\ u_T \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$Au = \begin{pmatrix} A_S & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_S \\ u_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_S u_S + B u_T \\ C u_S + D u_T \end{pmatrix} \geq 0$$

Wegen $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ folgt

$$A_S u_S \geq 0$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, daß A_S unzerlegbar ist. Dann ist A_S von endl oder aff Typ.

Falls $A_S u_S = 0$ so folgt $B = 0$ und somit $C = 0$. Dann wäre A zerlegbar. Also $A_S u_S > 0$ und A_S ist von endl Typ.

Die allgemeine Aussage folgt.

$\square$

7.2 Der symmetrische Fall

Satz

Sei A eine sym reelle $n \times n$ - Matrix mit den Eigenschaften $M1)$, $M2)$, $M3)$.

Dann gilt

A ist vom endl. Typ
$\Longleftrightarrow$ A ist pos. def

A ist vom affinen Typ
$\Longleftrightarrow$ A ist pos. semidef und hat Rang $n-1$

Bew

Sei A pos. semidef. Dann ist A von endl. oder aff Typ, da es sonst ein $x > 0$ mit $x^T A x < 0$ gäbe.

Die Fälle (Fin) und (Aff) werden durch den Rang unterschieden.

Sei A nun vom endl. oder affinen Typ. Dann gibt es ein $x > 0$ mit $Ax \geq 0$. Für $\lambda > 0$ ist somit

$$(A + \lambda 1)x > 0$$

d.h. $A + \lambda 1$ ist vom endl. Typ und $\det(A + \lambda 1) \neq 0$. Also ist $-\lambda$ kein Eigenwert von A. Die Eigenwerte von A sind also ≥ 0.

□

7.3 Verallgemeinerte Cartan Matrizen vom endl. oder aff. Typ

Theorem

Sei A eine unzerlegbare verallgem. Cartan Matrix vom endl. oder aff. Typ. Dann ist A symmetrisierbar.

Satz

Sei A eine unzerlegbare verallgem. Cartan Matrix. Dann gilt

A ist vom endl. Typ

$\Leftrightarrow \det(A_S) > 0 \quad \forall_S$

A ist vom aff. Typ

$\Leftrightarrow \det(A) = 0$ und $\det(A_S) > 0 \quad \forall_{S \neq \{1,\dots,n\}}$

<u>Bew</u>

Wir beweisen nur einen Teil der Aussagen.

Sei A von endl Typ. Dann ist $A = DB$ mit $D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ wobei $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon_i > 0$ und B sqm. Da A von endl. Typ ist, gibt es ein $x > 0$ mit $Ax > 0$. Somit $D^{-1}Ax > 0$. Also ist $D^{-1}A$ von endl Typ, d.h. pos. def. Also ist $\det((DA)_s) > 0$ und $\det(A_S) > 0$ für alle S $(\neq \{\})$.

$\square$

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine verallgem Cartan Matrix. Wir def das Dynkin Diag $\Gamma(A)$ folgendermaßen

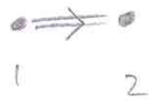
$\Gamma(A)$ hat n Vertices.

Ist $a_{ij} a_{ji} \leq 4$ so werden die Vertices i und j durch $\max(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ Kanten verbunden und ein Pfeil zeigt auf i falls $|a_{ij}| > 1$.

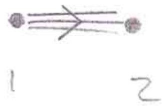
Ist $a_{ij} a_{ji} > 4$ so werden i und j durch eine Kante versehen mit dem geordneten Paar $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ verbunden.

Beispiele

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 

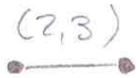
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 

$(\alpha_1^2 = 2\alpha_2^2)$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 

$(\alpha_1^2 = 3\alpha_2^2)$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 

Satz

Sei A eine verallgem. Cartan Matrix. Dann ist A genau dann unzerlegbar, wenn $\Gamma(A)$ zusammenhängend ist

Weiterhin ist A vollständig durch $\Gamma(A)$ und eine Numerierung der Vertices festgelegt.

<u>Satz</u>

Sei A eine unzerlegbare verallgem Cartan Matrix vom endl oder aff Typ. Dann ist jedes echte Unter-diag von $\Gamma(A)$ eine Vereinigung von Diag endl. Typs.

<u>Bew</u>

Das folgt aus dem letzten Satz in 7.1

□

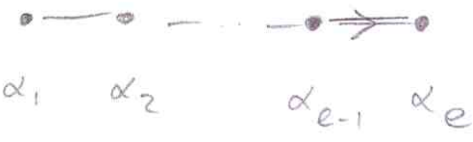
Dieser Satz wird in der Klassifikation der affinen verallgem Cartan Matrizen angewendet.

<u>Theorem</u>

Die Dynkin Diag der verallgem Cartan Matrizen endlichen Typ sind

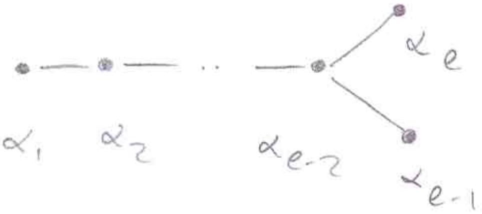
A_ℓ

B_ℓ

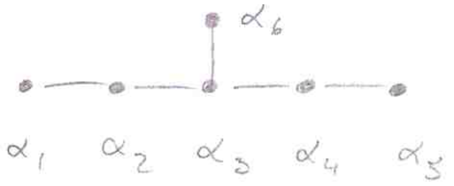


C_ℓ

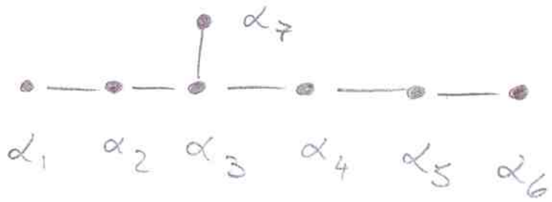
D_ℓ



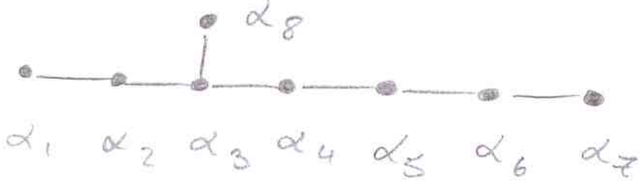
E_6



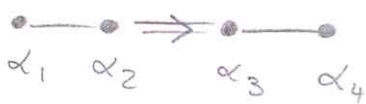
E_7



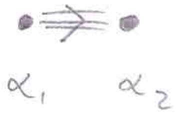
E_8



F_4

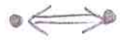


G_2



Die Dynkin Diag der verallgem Cartan Matrizen affinen Typs sind ($l+1$ Vertices)

$A_1^{(1)}$



$A_\ell^{(1)}$

$(\ell \geq 2)$

$B_\ell^{(1)}$

$(\ell \geq 3)$

$C_\ell^{(1)}$

$(\ell \geq 2)$

$D_\ell^{(1)}$

$(\ell \geq 4)$

$G_2^{(1)}$

$F_4^{(1)}$

$E_6^{(1)}$

$E_7^{(1)}$

$E_8^{(1)}$

$A_2^{(2)}$

$A_{2\ell}^{(2)}$

$(\ell \geq 2)$

$A_{2\ell-1}^{(2)}$

$(\ell \geq 3)$

$D_{\ell+1}^{(2)}$

$(\ell \geq 2)$

$E_6^{(2)}$

$D_4^{(3)}$

// 29.6.09

Theorem

Sei A eine unzerlegbare verallgem Cartan Matrix. Dann sind die folgenden Bed äquivalent

1) A ist von endl. Typ

2) A ist symmetrisierbar und die Standardform ist pos def auf $H_{\mathbb{R}}$.

3) $|W| < \infty$

4) $|\Delta| < \infty$

5) $G(A)$ ist eine endlich-dim einfache Lie Alg

6) Es gibt ein $\alpha \in \Delta_+$ so daß $\alpha + \alpha_i \notin \Delta$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Bew

1) $\Rightarrow$ 2)

Da A von endl. Typ ist, ist A symmetrisierbar. Also $A = DB$ mit $D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon_i > 0$ und B sym. Wegen $\det(A) \neq 0$ ist $\Pi^\vee = \{h_1, \dots, h_n\}$ eine Basis von $H_{\mathbb{R}}$. Für die Bilinearform gilt

$$(h_i, h_j) = \varepsilon_i b_{ij} \varepsilon_j = (DBD)_{ij} = (AD)_{ij}$$

Aus $\det(A_S) > 0$ folgt $\det((AD)_S) > 0$ für alle $S \subset \{1, \dots, n\}$. Also ist $(\, , \,)$ pos def auf $H_{\mathbb{R}}$.

2) $\Rightarrow$ 3)

W läßt $Q^\vee = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z} h_i$ und $H_\mathbb{R}$ inv. und $Q^\vee$ erzeugt $H_\mathbb{R}$. Somit ist

$$W \subset \mathrm{Aut}(Q^\vee) = \{ f \in O(H_\mathbb{R}) \mid f(Q^\vee) = Q^\vee \}$$
$$\subset O(H_\mathbb{R})$$

$Q^\vee$ wird als $\mathbb{Z}$-Modul erzeugt von

$$M = \{ v \in Q^\vee \mid v^2 \leq K \}$$

mit $K = \max\{h_1^2, \dots, h_4^2\}$. M ist der Schnitt eines Kompaktums mit einer abgeschlossenen diskreten Menge und somit endlich.

$\mathrm{Aut}(Q^\vee)$ permutiert M, d.h.

$$\mathrm{Aut}(Q^\vee) \subset \mathrm{Sym}(M)$$

und

$$|\mathrm{Aut}(Q^\vee)| \leq |\mathrm{Sym}(M)| < \infty$$

Also $|W| < \infty$.

3) $\Rightarrow$ 4)
siehe 6.2

4) $\Rightarrow$ 5)

Sei $|\Delta| < \infty$. Aus

$$G(A) = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$$

und $\dim(G_\alpha) < \infty$ folgt $\dim(G(A)) < \infty$

Sei $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$. Dann ist $\rho(h_i) = 1$

Denn

$$w_i(\rho) = w_i\left(\tfrac{1}{2}\alpha_i + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}} \alpha\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\alpha_i + \sum_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}} \alpha$$

w_i perm $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$

$$= -\alpha_i + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$$

$$= \rho - \alpha_i$$

Andererseits

$$w_i(\rho) = \rho - \rho(h_i)\alpha_i$$

Also $\rho(h_i) = 1$.

Schreibe $\rho = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j$ und setze

$x = (x_i)$. Dann ist $x > 0$ und

$$1 = \delta(h_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j(h_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$= (Ax)_i$$

d.h. $Ax > 0$. Also ist A vom endl. Typ. Insbesondere ist $\det(A) \neq 0$.

Zusammen mit der Unzerlegbarkeit von A folgt, daß $G(A)$ einfach ist (vgl. Aufgabe 54 Blatt 9)

5) $\Rightarrow$ 6)

Wähle ein $\alpha \in \Delta$ mit maximaler Höhe.

6) ⇒ 1)

Sei $\alpha \in \Delta_+$ so daß $\alpha + \alpha_i \notin \Delta$ für alle i.

$G(A)$ ist int $G(A)$-Modul bzgl. ad.

Nach dem Korollar in 5.2 ist dann $\alpha(h_i) \geq 0$ für alle i.

Schreibe $\alpha = \sum x_j \alpha_j$ und setze $x = (x_j)$. Dann ist $x \geq 0$ und

$$\begin{aligned} \alpha(h_i) &= \sum_j x_j \alpha_j(h_i) \\ &= \sum_j a_{ij} x_j \\ &= (Ax)_i \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist $Ax \geq 0$. Somit ist A vom endl. oder affinen Typ.

Angenommen A ist vom affinen Typ.

Dann folgt $Ax = 0$, d.h. $\alpha(h_i) = 0$

für alle i. Insbesondere $\alpha \neq \alpha_i$.

Betrachte den G_i-Modul

$$V = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} G_{\alpha + t\alpha_i}$$

Sei $M = \{ t \in \mathbb{Z} \mid \alpha + t\alpha_i \in \Delta \cup \{0\} \}$

Dann ist $M = [p, q]$ mit $q = 0$

und $p = p - q = \alpha(h_i) = 0$.

Also ist $\alpha - \alpha_i \notin \Delta \cup \{0\}$ und somit

$\alpha - \alpha_i \notin \Delta$ für alle i. Sei $y \in G_\alpha \setminus \{0\}$.

Dann ist $[y, f_i] \in G_{\alpha - \alpha_i}$, d.h.

$[y, f_i] = 0$. Das impliziert $y = 0$

Also ist A vom endl Typ.

$\square$