6. Die Weyl Gruppe

6.1 Definition

Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Alg. Wir def die Spiegelungen

$$w_i : H^* \longrightarrow H^*$$
$$\lambda \longmapsto \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$$

Dann gilt

1) $$w_i(\alpha_j) = \alpha_j - \alpha_j(h_i)\alpha_i$$
$$= \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$$

d.h. $w_i(Q) \subset Q$

2) $w_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ weil $a_{ii} = 2$

3) $\det(w_i) = -1$ weil w_i die Hyperebene $\{\lambda \in H^* \mid \lambda(h_i) = 0\}$ invariant läßt

Die Untergruppe W von $GL(H^*)$ erzeugt von den w_i heißt Weyl Gruppe von $G(A)$.

Sei $w \in W$. Zu $h \in H$ gibt es ein eindeutiges $w(h) \in H$ so daß

$$\lambda(w(h)) = (w^{-1}\lambda)(h)$$

für alle $\lambda \in H^*$.

Dies def eine Operation von W

auf H. Es ist

$$\lambda(w_i(h)) = (w_i\lambda)(h)$$
$$= (\lambda - \lambda(h_i)\alpha_i)(h)$$
$$= \lambda(h - \alpha_i(h)h_i)$$

so daß

$$w_i(h) = h - \alpha_i(h)h_i$$

Insbesondere läßt W das duale Wurzelgitter

$$Q^\vee = \bigoplus \mathbb{Z}h_i$$

inv.

6.2 Eigenschaften

Satz

Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Alg

1) Sei V ein integrabler $G(A)$-Modul. Dann ist

$$\mathrm{mult}_V(\lambda) = \mathrm{mult}_V(w(\lambda))$$

für alle $\lambda \in H^*$, $w \in W$.

Insbesondere ist die Menge der Gewichte inv unter W.

2) Das Wurzelsystem Δ von $G(A)$ ist W-inv und $\mathrm{mult}(\alpha) = \mathrm{mult}(w(\alpha))$ für alle $\alpha \in \Delta$, $w \in W$

Bew

1) Es reicht die Beh für die w_i zu zeigen. Sei $U = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} V_{\lambda + t\alpha_i}$. Dann ist U ein G_i-Modul und die Mult von $\lambda + t\alpha_i$ liegen symmetrisch um 0 bzw $t = -\frac{1}{2}\lambda(h_i)$

($(\lambda + t\alpha_i)(h_i) = 0 \rightsquigarrow t = -\frac{1}{2}\lambda(h_i)$)

Folglich haben $\lambda \in H^*$ und

$$\lambda - \lambda(h_i)\alpha_i = w_i(\lambda)$$

dieselbe Mult.

2) folgt aus 1) und der Tatsache,

daß $G(A)$ ein integrabler $G(A)$-Modul ist unter ad.

$\square$

<u>Satz</u>

Sei $\alpha \in \Delta_+$ mit $w_i(\alpha) < 0$. Dann ist $\alpha = \alpha_i$. Insbesondere ist $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ inv. unter w_i

<u>Bew</u>

Sei $w_i(\alpha) = \alpha - \alpha(h_i)\alpha_i < 0$. Dann ist $\alpha = c\alpha_i$ für ein $c \in \mathbb{Z}$, also $\alpha = \pm\alpha_i$ und $\alpha = \alpha_i$. Die zweite Aussage folgt aus $w_i(\Delta) = \Delta$.

Satz

Sei A eine symmetrisierbare verallg Cartan Matrix und $(,)$ eine Standardform auf $G(A)$. Dann ist die Restriktion von W auf H^* inv unter W.

Bew

Es reicht die Invarianz unter den w_i zu zeigen. Sei $\lambda \in H^*$. Dann

$$(w_i(\lambda), w_i(\lambda))$$

$$= (\lambda - \lambda(h_i)\alpha_i, \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i)$$

$$= (\lambda, \lambda) - 2\lambda(h_i)(\lambda, \alpha_i)$$

$$+ \lambda(h_i)^2 (\alpha_i, \alpha_i)$$

Mit $h_i = \frac{2}{(\alpha_i;\alpha_i)} \nu^{-1}(\alpha_i)$ folgt

$$(w_i(\lambda), w_i(\lambda)) = (\lambda, \lambda) - 4 \frac{(\lambda,\alpha_i)^2}{(\alpha_i;\alpha_i)} + 4 \frac{(\lambda,\alpha_i)^2}{(\alpha_i;\alpha_i)^2} (\alpha_i;\alpha_i)$$

$$= (\lambda, \lambda)$$

□

Die entsprechende Aussage gilt auch für H.

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $(H_{\mathbb{R}}, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A über $\mathbb{R}$. Dann ist $(H, \Pi, \Pi^\vee)$

mit $H = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} H_{\mathbb{R}}$ eine Realisierung von A über $\mathbb{C}$.

Wir def eine antilin Involution ω_0 auf $G(A)$ durch

$$\omega_0(e_i) = -e_i$$
$$\omega_0(f_i) = -f_i$$
$$\omega_0(h) = -h \qquad \forall\, h \in H_{\mathbb{R}}$$

Die Fixpunkte von ω_0 bilden eine reelle Form $C(A)$ von $G(A)$, d.h. $G(A) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C(A)$. Diese wird als kompakte Form von $G(A)$ bez.

Sei A eine verallgem. Cartan Matrix, $(H_{\mathbb{R}}, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A über $\mathbb{R}$ und $H = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} H_{\mathbb{R}}$.

Es ist

$$w_i(h) = h - \alpha_i(h)\, h_i$$

für $h \in H$. Somit operiert w_i auch auf $H_{\mathbb{R}}$.

Die Menge

$$C = \{ h \in H_{\mathbb{R}} \mid \alpha_i(h) \geq 0 \quad \forall_i \}$$

heißt (abgeschlossene) <u>fundamentale Weyl Kammer</u>, $w(C)$ wird als <u>Weyl Kammer</u> bez. und

$$X = \bigcup_{w \in W} w(C)$$

als <u>Tits Kegel</u>.

<u>Theorem</u>

1) C ist ein <u>Fundamentalbereich</u> für die Operation von W auf X, d.h. jeder Orbit $W(h)$, $h \in X$, schneidet C in genau einem Punkt. Insbesondere operiert W <u>einfach transitiv</u> auf den Weyl Kammern.

2) $X = \{ h \in H_{\mathbb{R}} \mid \alpha(h) \geq 0$ für fast alle $\alpha \in \Delta_+ \}$ Insbesondere ist X ein

konvexer Kegel, d.h. $h_1, h_2 \in X$, $c_1, c_2 \geq 0$ impliziert $c_1 h_1 + c_2 h_2 \in X$

3) Die folgenden Bed sind äquivalent

a) $|W| < \infty$

b) $X = H_{\mathbb{R}}$

c) $|\Delta| < \infty$