## 5 Integrable Darstellungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir integrable Darst.

### 5.1 Definitionen

Sei

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Standardbasis von $sl_2(\mathbb{C})$.

Es gilt

$$[h, e] = 2e, \quad [h f] = -2f$$

$$[e f] = h$$

Durch Induktion zeigt man

$$[h\, e^k] = 2k\, e^k \qquad [h, f^k] = -2k\, f^k$$

$$[e\, f^k] = -k(k-1)\, f^{k-1} + k\, f^{k-1}\, h$$

(Gleichungen in $U(sl_2(\mathbb{C}))$ )

<u>Theorem</u>

1) Sei $V$ ein $sl_2(\mathbb{C})$ - Modul und $v \in V$ mit $h.v = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Setze $v_j = \frac{f^j}{j!} v$. Dann gilt

$$h.v_j = (\lambda - 2j)\, v_j$$

Ist zusätzlich $e.v = 0$ so gilt

$$e.v_j = (\lambda - j + 1)\, v_{j-1}$$

2) Zu jeder ganzen Zahl $m \geq 0$ gibt es bis auf Isom genau einen irred $(m+1)$-dim $sl_2(\mathbb{C})$-Modul. Dieser Modul hat eine Basis $\{v_0, \dots, v_m\}$ mit

$$h.v_j = (m-2j)\,v_j$$
$$f.v_j = (j+1)\,v_{j+1}$$
$$e.v_j = (m+1-j)\,v_{j-1}$$

$(v_{-1} = v_{m+1} = 0)$

Sei $A$ eine verallgem Cartan Matrix und $G(A)$ die zugehörige Kac-Moody Alg. Dann ist

$$G_i = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}f_i$$

eine Unteralg von $G(A)$ isom zu $sl_2(\mathbb{C})$.

<u>Satz</u>

Sei $A$ eine ver allgem Cartan Matrix und $G(A)$ die Kac-Moody Alg zu $A$. Dann gelten die Serre Rel

$$\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$$
$$\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

<u>Bew</u>

Wir beweisen die zweite Beh. Die erste folgt dann durch Anwendung von $\omega$.

Setze $f_{ij} = ad(f_i)^{1-a_{ij}} f_j$. Es reicht z.z.

$$[e_k f_{ij}] = 0$$

für alle $k$.

$G_i$ op in der adj Darst auf $G(A)$.

Es ist

$$h_i(f_j) = [h_i f_j] = -a_{ij} f_j$$
$$e_i(f_j) = 0 \qquad \text{für } i \neq j$$

Nach 1) im letzten Theorem ist

(mit $v = f_j$)

$$[e_i f_{ij}] = e_i(f_i^{1-a_{ij}}(f_j))$$

$$= (1-a_{ij})\underbrace{(-a_{ij}-(1-a_{ij})+1)}_{=0} f_i^{-a_{ij}}(f_j)$$

$$= 0$$

Sei $k \neq i$. Dann

$$[\mathrm{ad}(e_k), \mathrm{ad}(f_i)] = \mathrm{ad}(\underbrace{[e_k f_i]}_{=0}) = 0$$

und

$$[e_k, f_{ij}] = \mathrm{ad}(e_k)\,\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j)$$

$$= \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}\,\mathrm{ad}(e_k)(f_j)$$

$$= \delta_{jk}\,\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}\, h_j$$

$$= \delta_{jk}\,\mathrm{ad}(f_i)^{-a_{ij}}\,\underbrace{[f_i h_j]}_{=a_{ji} f_i}$$

$$= \delta_{jk}\, a_{ji}\, ad(f_i)^{-a_{ij}} f_i$$

$$= 0$$

□

Wir werden sehen, daß das Ideal $J$ (vgl 2.2 und 2.3) für symmetrisierbare verallgem Cartan Matrizen von den Serre Rel erzeugt wird.

Satz

Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Alg. Dann sind $ad(e_i)$ und $ad(f_i)$ lokal nilpotent.

Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Alg. Ein $G(A)$-Modul $V$ heißt <u>$H$-diagonalisierbar</u>, wenn

$$V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$$

mit

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid h.v = \lambda(h) v \quad \forall_{h \in H} \}$$

$V_\lambda$ heißt <u>Gewichtsraum</u> und $\lambda \in H^*$ mit $V_\lambda \neq 0$ heißt <u>Gewicht</u>

Die <u>Mult</u> von $\lambda$ ist $\dim V_\lambda$.

Ein $G(A)$-Modul $V$ heißt

integrabel, wenn $V$ $H$-diag ist und die $e_i$ und $f_i$ lokal nilp. operieren.

Bsp

$G(A)$ ist ein integrabler $G(A)$-Modul bzgl ad.

// 23.6.09

5.2 Eigenschaften

Satz

Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Alg und $V$ ein integrabler $G(A)$-Modul

Dann gilt

1) $V$ zerfällt in eine direkte

Summe von endlich-dim irred
$H$- und $G_i$-Moduln.

2) Sei $\lambda \in H^*$ ein Gewicht von $V$,
$M = \{ t \in \mathbb{Z} \mid \lambda + t\alpha_i$ ist Gewicht $\}$
und $m_t = \text{mult}_V(\lambda + t\alpha_i)$. Dann

a) $M = [-p, q]$ mit $p, q \geq 0$ und
$p - q = \lambda(h_i)$ oder $M = (-\infty, +\infty)$.
Falls $\text{mult}_V(\lambda) < \infty$, so $p, q < \infty$

b) Die Abb $e_i : V_{\lambda + t\alpha_i} \longrightarrow V_{\lambda + (t+1)\alpha_i}$
ist inj. für $t$ in $[-p, -\frac{1}{2}\lambda(h_i))$
Insbesondere ist $t \mapsto m_t$ monoton
wachsend auf diesem Intervall.

c) Die Fkt $t \mapsto m_t$ ist symm bzgl $t = -\frac{1}{2}\lambda(h_i)$

d) Sind $\lambda$ und $\lambda + \alpha_i$ Gewichte, so ist $e_i(V_\lambda) \neq 0$.

Bew

1) Sei $v \in V_\lambda$. Dann ist

$$[e_i f_i^k] v = -k(k+1) f_i^{k-1} v + k f_i^{k-1} h_i v$$

bzw

$$e_i f_i^k v = k((1-k) + \lambda(h_i)) f_i^{k-1} v + f_i^k e_i v$$

so daß

$$u = \sum_{m,k \geq 0} c_{km} f_i^k e_i^m v$$

invariant unter $G_i$ und $H$ ist

Da die $e_i, f_i$ lokal nilpotent sind, ist $u$ endlich-dim und zerfällt nach dem Th von Weyl in eine direkte Summe endlich-dim irred $G_i$-Moduln. $V$ ist also die Summe von endlich-dim irred $G_i$-Moduln. Durch Weglassen geeigneter Moduln erreicht man, daß diese Summe direkt ist, d.h. $V = \oplus W_e$. Wir zeigen nun, daß die $W_e$ inv

unter $H$ sind. Da $\alpha_i(h_i) = 2$ ist,

gilt $H = \mathbb{C}h_i \oplus \operatorname{Ker}(\alpha_i)$. Ein $w$ in

$W_e$ läßt sich schreiben als

$$w = \sum c_{mk} f_i^m e_i^k v$$

für geeignetes $v \in V_\lambda$. Für $h \in \operatorname{Ker}(\alpha_i)$

ist

$$h.w \underset{\substack{\uparrow \\ [h, e_i] = [h, f_i] = 0}}{=} \sum c_{mk} f_i^m e_i^k h v = \lambda(h) w$$

d.h. $W_e$ ist inv unter $\operatorname{Ker}(\alpha_i)$

und somit inv unter $H$.

2) Sei $U = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} V_{\lambda + t\alpha_i}$. Nach 1) zerfällt $U$ in eine direkte Summe von endlich-dim irred $G_i + H$-Moduln. Die Beh folgen dann aus der Darstellungstheorie von $sl_2(\mathbb{C})$.

$\square$

<u>Korollar</u>

Sei $V$ ein integrabler $G(A)$-Modul und $\lambda$ Gewicht. Ist $\lambda + \alpha_i$ kein Gewicht so folgt $\lambda(h_i) \geq 0$.

<u>Bew</u>

In diesem Fall ist $M = [-p, 0]$

d.h. $0 \leq p = p - q = \chi(h_i)$

$\square$