4. Der Casimir Operator

Wir konst nun einen Casimir Operator für beschränkte Moduln.

4.1 Definitionen

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und

$$G(A) = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q} G_\alpha$$

die Wurzelraumzerlegung von $G(A)$.
Ein $G(A)$-Modul V heißt <u>beschränkt</u>, wenn für alle $v \in V$ gilt:

$$G_\alpha . v = 0$$

für fast alle $\alpha \in \Delta_+$

Sei A nun zusätzlich symmetrisierbar und $(\, , \,)$ eine wie oben konst inv nicht ausg sym Bilinearform auf $G(A)$.
Def man ein Elt ρ auf H mit

$$\rho(h_i) = \frac{1}{2} a_{ii}$$

ρ ist eindeutig falls $\det(A) \neq 0$.
Es gilt

$$(\rho, \alpha_i) = \frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_i)$$

$$\Big((\rho, \alpha_i) = (\rho, \nu^{-1}(h_i)) / \varepsilon_i = \rho(h_i) / \varepsilon_i = a_{ii} / 2\varepsilon_i = \frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_i) \Big)$$

Sei V ein <u>beschränkter</u> $G(A)$-Modul

Wir def nun den Casimir Op.

Seien $\{u_i\}$ und $\{u^i\}$ duale Basen von H, d.h. $(u_i, u^j) = \delta_i^j$. Dann ist für $\lambda, \mu \in H^*$

$$\lambda = \sum \lambda(u_i)\, \nu(u^i) = \sum \lambda(u^i)\, \nu(u_i)$$

(wende die Summe auf u_j resp u^j an) und

$$(\lambda, \mu) = \sum \lambda(u_i)\, \mu(u^i)$$
$$= \sum \lambda(u^i)\, \mu(u_i)$$

Der Operator $\sum u^i u_i$ ist unabh von der Wahl der Basen.

Satz

Sei V (beschränkter) $G(A)$ - Modul und $x \in G_\alpha$. Dann ist

$$[\sum u^i u_i , x] = x((\alpha,\alpha) + 2\nu^{-1}(\alpha))$$

als Operator auf V.

Für eine Wurzel α seien $\{x_\alpha^i\}$ und $\{x_{-\alpha}^i\}$ duale Basen von G_α und $G_{-\alpha}$.

Def den Casimir Operator als

$$\Omega = 2\nu^{-1}(\varsigma) + \sum u^i u_i + 2\sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_i x_{-\alpha}^i x_\alpha^i$$

Ω ist wohldef auf V und hängt

nicht von der Wahl der dualen Basen ab

4.2 Eigenschaften

Theorem

Sei A symmetrisierbar und V ein beschränkter $G(A)$-Modul. Dann kommutiert Ω mit der Operation von $G(A)$.

Bew

Es reicht z.z. daß Ω mit den Elementen aus H und den e_i, f_i kommutiert.

Def

$$\Omega_0 = 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i x_\alpha^i x_{-\alpha}^i$$

Sei $h \in H$. Dann ist

$$[\Omega, h] = [2\nu^{-1}(\beta), h]$$

$$+ [\sum u^i u_i, h] + [\Omega_0, h]$$

$$= 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i [x_\alpha^i x_{-\alpha}^i, h]$$

$$= 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i \left\{ x_\alpha^i \underbrace{[x_{-\alpha}^i, h]}_{= \alpha(h) x_{-\alpha}^i} + \underbrace{[x_\alpha^i, h]}_{= -\alpha(h) x_\alpha^i} x_{-\alpha}^i \right\}$$

$$= 0$$

// 22.6.09

Wir zeigen nun, daß $[\Omega, e_j] = 0$

Def Zahlen durch

$$[x^i_\alpha, e_{\alpha_j}] = \sum_k c^{ik}_{\alpha+\alpha_j} \; x^k_{\alpha+\alpha_j}$$

$$[x^i_{-\alpha}, e_{\alpha_j}] = \sum_k d^{ik}_{-\alpha+\alpha_j} \; x^k_{-\alpha+\alpha_j}$$

(falls $\pm\alpha + \alpha_j$ Wurzel ist). Dann folgt aus der Invarianz

$$([x^i_\alpha, e_{\alpha_j}], x^k_{-\alpha-\alpha_j}) = \sum_m c^{im}_{\alpha+\alpha_j} (x^m_{\alpha+\alpha_j}, x^k_{-\alpha-\alpha_j})$$

$$= c^{ik}_{\alpha+\alpha_j}$$

$$\|$$

$$-(x^i_\alpha, [x^k_{-\alpha-\alpha_j}, e_{\alpha_j}]) = -\sum_m d^{im}_{-\alpha} (x^i_\alpha, x^m_{-\alpha})$$

$$= -d^{ki}_{-\alpha}$$

Damit

$$[\Omega_0, e_{\alpha_j}] = 2 \sum_{\alpha\in\Delta_+} \sum_i [x^i_{-\alpha} x^i_{\alpha}, e_{\alpha_j}]$$

$$= 2 \sum_{\alpha\in\Delta_+} \sum_i \Big\{ x^i_{-\alpha} [x^i_{\alpha}, e_{\alpha_j}] + [x^i_{-\alpha}, e_{\alpha_j}] x^i_{\alpha} \Big\}$$

$$= 2 [x^i_{-\alpha_j} e_{\alpha_j}] x^i_{\alpha_j} \qquad (x^i_{\alpha_j} \sim e_{\alpha_j})$$

$$+ 2 \sum_{\substack{\alpha\in\Delta_+ \\ \alpha\neq\alpha_j}} \sum_i \Big\{ x^i_{-\alpha} [x^i_{\alpha}, e_{\alpha_j}] + [x^i_{-\alpha}, e_{\alpha_j}] x^i_{\alpha} \Big\}$$

$$= 2 [x^i_{-\alpha_j} x^i_{\alpha_j}] e_{\alpha_j}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{\alpha\in\Delta_+ \\ \alpha+\alpha_j\in\Delta}} \sum_i x^i_{-\alpha} [x^i_{\alpha} e_{\alpha_j}]$$

$$+ 2 \sum_{\substack{\alpha\in\Delta_+ \\ -\alpha+\alpha_j\in\Delta}} \sum_i [x^i_{-\alpha} e_{\alpha_j}] x^i_{\alpha}$$

Setze in der ersten Summe $\beta = \alpha$ und in der zweiten $\beta = \alpha - \alpha_j$.

$$= 2 \, [x^i_{-\alpha_j} \, x^i_{\alpha_j}] \, e_{\alpha_j}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{\beta \in \Delta_+ \\ \beta + \alpha_j \in \Delta_+}} \sum_i \Big\{ x^i_{-\beta} \, [x^i_\beta \, e_{\alpha_j}] + [x^i_{-\beta-\alpha_j} \, e_{\alpha_j}] \, x^i_{\beta+\alpha_j} \Big\}$$

$$= 2 \, [x^i_{-\alpha_j} \, x^i_{\alpha_j}] \, e_{\alpha_j}$$

$$+ 2 \sum_\beta \sum_{i,k} \Big\{ c^{ik}_{\beta+\alpha_j} \, x^i_{-\beta} \, x^k_{\beta+\alpha_j} + d^{ik}_{-\beta} \, x^k_{-\beta} \, x^i_{\beta+\alpha_j} \Big\}$$

$$= 2 \, [x^i_{-\alpha_j} \, x^i_{\alpha_j}] \, e_{\alpha_j}$$

$$+ 2 \sum_\beta \sum_{i,k} \Big\{ c^{ik}_{\beta+\alpha_j} \, x^i_{-\beta} \, x^k_{\beta+\alpha_j} + d^{ki}_{-\beta} \, x^i_{-\beta} \, x^k_{\beta+\alpha_j} \Big\}$$

$$= 2\,[x_{-\alpha_j}\, x_{\alpha_j}]\, e_{\alpha_j}$$

$$= 2\,(x_{-\alpha_j}\, x_{\alpha_j})\, \nu^{-1}(-\alpha_j)\, e_{\alpha_j}$$

$$= -2\, \nu^{-1}(\alpha_j)\, e_{\alpha_j}$$

weil $d^{\kappa i}_{-\beta} = - c^{i\kappa}_{\beta+\alpha_j}$. Also

$$[\ell_e, e_{\alpha_j}] = -2\, \nu^{-1}(\alpha_j)\, e_{\alpha_j}$$

$$= -2 \left\{ [\nu^{-1}(\alpha_j)\, e_{\alpha_j}] + e_{\alpha_j}\, \nu^{-1}(\alpha_j) \right\}$$

$$= -2 \left\{ \alpha_j(\nu^{-1}(\alpha_j))\, e_{\alpha_j} + e_{\alpha_j}\, \nu^{-1}(\alpha_j) \right\}$$

$$= -2\, e_{\alpha_j} \left((\alpha_j, \alpha_j) + \nu^{-1}(\alpha_j) \right)$$

Damit

$$[\Omega, e_{\alpha_j}] = 2[\nu^{-1}(\varrho), e_{\alpha_j}]$$

$$+ \sum [u^i u_i, e_{\alpha_j}] + [\Omega_0, e_{\alpha_j}]$$

$$= 2\alpha_j(\nu^{-1}(\varrho))\, e_{\alpha_j}$$

$$+ e_{\alpha_j}((\alpha_j \alpha_j) + 2\nu^{-1}(\alpha_j))$$

$$- 2 e_{\alpha_j}((\alpha_j \alpha_j) + \nu^{-1}(\alpha_j))$$

$$= 2(\varrho, \alpha_j)\, e_{\alpha_j} + e_{\alpha_j}((\alpha_j \alpha_j) + 2\nu^{-1}(\alpha_j))$$

$$- 2 e_{\alpha_j}((\alpha_j \alpha_j) + \nu^{-1}(\alpha_j))$$

$$= 0$$

weil $(\varrho, \alpha_j) = \frac{1}{2} \alpha_j^2$

Analog $[\Omega, f_j] = 0$.

$\square$

Satz

Sei V ein beschränkter $G(A)$-Modul. Angenommen es gibt ein $v \in V$ mit

$$N^+ v = 0 \qquad \text{und}$$

$$h.v = \lambda(h) v \qquad \forall_{h \in H}$$

für ein $\lambda \in H^*$. Dann ist

$$\Omega.v = (\lambda + 2\delta, \lambda) v$$

Ist zusätzlich $V = U(G(A)) v$ so gilt

$$\Omega = (\lambda + 2\delta, \lambda) 1_V$$

Bew

$$\Omega v = \underbrace{2\vartheta^{-1}(\delta)}_{\in H} v + \sum u^i u_i v + \underbrace{\Omega_0 v}_{=0}$$

$$= 2\lambda(\vartheta^{-1}(\delta)) v + \sum \lambda(u^i)\lambda(u_i) v$$

$$= 2(\lambda,\delta) v + (\lambda,\lambda) v$$

$$= (2(\lambda,\delta) + (\lambda,\lambda)) v$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten und der Tatsache, daß Ω mit der Operation von $G(A)$ kommutiert

□