3. Die invariante Bilinearform

In diesem Abschnitt konstruieren wir eine invariante Bilinearform auf $G(A)$

3.1 Eine Bilinearform auf $G(A)$

Es gilt

Satz

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und D eine invertierbare Diagonalmatrix. Dann sind $G(A)$ und $G(DA)$ isomorph.

Eine komplexe $n \times n$-Matrix A heißt <u>symmetrisierbar</u>, wenn es es eine invertierbare Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ und eine symmetrische Matrix $B = (b_{ij})$ gibt, so daß

$$A = D B$$

bzw $a_{ij} = \varepsilon_i b_{ij}$ (die i-te Zeile von B wird mit ε_i mult)

B heißt Symmetrisierung von A und $G(A)$ <u>symmetrisierbare Lie Alg.</u>

Satz

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und $(,)$ eine nicht ausg invariante symmetrische Bilinearform auf $G(A)$. Dann

1) $(G_\alpha, G_\beta) = 0$ falls $\alpha + \beta \neq 0$

Insbesondere ist $(,)$ nicht ausg auf H.

2) A ist symmetrisierbar

Bew

Wir zeigen nur 1)

Sei $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$. Dann

$$(h\,[x,y]) = ([h,x],y) = \alpha(h)\,(x,y)$$
$$\|$$
$$-(h\,[y,x]) = -([h,y],x) = -\beta(h)\,(x,y)$$

Also

$$(\alpha+\beta)(h)\,(x,y) = 0 \qquad \forall_{h \in H}$$

und somit

$$(x,y) = 0$$

falls $\alpha+\beta \neq 0$.

$\square$

Sei $(\,,\,)$ eine nicht ausg inv symmetrische Bilinearform auf $G(A)$. Dann ist die Abb

$$\nu : H \longrightarrow H^*$$
$$h \longmapsto (h,\,)$$

ein Isomorphismus. Für $\alpha \in H^*$ ist $\alpha(h) = (\vartheta^{-1}(\alpha), h)$.

<u>Satz</u>

Sei $x \in G_\alpha$, $y \in G_{-\alpha}$. Dann ist

$$[x, y] = (x, y)\, \vartheta^{-1}(\alpha)$$

<u>Bew</u>

Für $h \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
(h, [xy]) &= ([hx], y) \\
&= \alpha(h)\, (x, y) \\
&= (\vartheta^{-1}(\alpha), h)\, (x, y) \\
&= (h, (x, y)\, \vartheta^{-1}(\alpha))
\end{aligned}$$

$\square$

Wir konst nun eine nichtausg symm Bilinearform auf H.

Sei A eine <u>symmetrisierbare</u> komplexe $n\times n$-Matrix und $A = DB$. Sei $(H, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A und $H' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} h_i$. Wir erweitern $\Pi^\vee = \{h_1, \dots, h_n\}$ zu einer Basis $\{h_1, \dots, h_{2n-\ell}\}$ von H. Sei

$$(\alpha_j(h_i))_{\underbrace{i=1,\dots,2n-\ell}_{\text{Zeilenindex}}\ \underbrace{j=1,\dots,n}_{\text{Spaltenindex}}} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

Da die α_i lin unabh sind, ist

Rang $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = n$. Wähle $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n-\ell}$ in H^* so daß

$$(\alpha_j(h_i))_{i,j=1,\dots,2n-\ell} = \begin{pmatrix} A & DC^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} A & DC^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar:

Sei $\sum_{i=1}^{2n-\ell} c_i \alpha_j(h_i) = 0$ eine Relation zwischen den Zeilen. Dann ist

$$\alpha_j \left(\sum_{i=1}^{2n-\ell} c_i h_i \right) = 0$$

für $j = 1, \dots, n$. Da die $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ lin unabh sind, hat $\{ h \in H \mid \alpha_j(h) = 0$ für $j = 1, \dots, n \}$

Dimension $(2n-l)-n = n-l$.

Da $\operatorname{rang}(A) = l$ folgt, daß $\{h \in H \mid$

$\alpha_j(h) = 0$ für $j = 1, \dots, n\}$ in H' liegt.

Also ist

$$c_{n+1} = \dots = c_{2n-l} = 0$$

Wir zeigen nun, daß $\operatorname{rang}(A\,D\,C^T)$

$= n$. Dann folgt

$$c_1 = \dots = c_n = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(A\,D\,C^T) &= \operatorname{rang}(DB\,DC^T) \\ &= \operatorname{rang}(B\,C^T) \\ &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} D^{-1}A \\ C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

$$= n$$

Also ist $\begin{pmatrix} A & DC^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar und die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & DC^T \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & I_{n-e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD & DC^T \\ CD & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} BDB & DC^T \\ CD & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch und invertierbar. Wir def eine <u>nicht ausg</u> <u>symmetrische</u> Bilinearform auf H, indem wir diese Matrix als Gram Matrix sehen. Also

$$(h_i, h_j) = \varepsilon_i \varepsilon_j b_{ij} = a_{ij} \varepsilon_j \quad \text{für } i,j = 1, \dots, n$$

$$(h_i, h) = \varepsilon_i \alpha_i(h) \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \ h \in H$$

$$(h', h'') = 0 \quad \text{für } h', h'' \in H''$$

$$\text{wobei } H'' = \bigoplus_{i=n+1}^{2n-l} \mathbb{C} h_i$$

Theorem

Die Bilinearform läßt sich zu einer invarianten nicht ausg symmetrischen Bilinearform auf $G(A)$ fortsetzen.

Bew

Der Beweis ist konstruktiv und wird durch Ind über die Höhe geführt.

Es ist

$$G(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} G_j$$

mit

$$G_j = \bigoplus_{ht(\alpha) = j} G_\alpha$$

Def

$$G(N) = \bigoplus_{j=-N}^{N} G_j$$

Die Bilinearform ist auf $G(0) = H$ bereits def.

Wir setzen die Form auf $G(1)$ fort durch

$$(e_i f_j) = (f_j, e_i) = \delta_{ij} \varepsilon_i \qquad i,j = 1, \ldots, 4$$

$$(G_0, G_{\pm 1}) = (G_{\pm 1}, G_0) = 0$$

$$(G_{\pm 1}, G_{\pm 1}) = 0$$

Die Form auf $G(1)$ ist nicht ausg und symmetrisch. Wir müssen die Invarianz zeigen, d.h.

$$(x\,[y,z]) = ([x,y]\,z)$$

für alle $x, y, z \in G(1)$ mit $[y,z]$, $[x,y] \in G(1)$.

Das ist eine einfache Fallunterscheidung. Zum Beispiel

$$(h\,[e_i f_j]) = \delta_{ij}\,(h, h_i)$$

$$= \delta_{ij}\,\varepsilon_i\,\alpha_i(h)$$

$$([h, e_i], f_j) = \alpha_i(h)\,(e_i f_j)$$

$$= \delta_{ij}\,\varepsilon_i\,\alpha_i(h)\,.$$

Wir erweitern nun $(\,,\,)$ zu einer symmetrischen Bilinearform auf $G(N)$ durch Ind über N, so daß

1) $(G_i, G_j) = 0$ falls $|i|, |j| \leq N$, $i+j \neq 0$

2) $(x[y,z]) = ([x,y],z)$ für alle $x, y, z \in G(N)$ mit $[x,y]$, $[y,z] \in G(N)$.

Sei $N \geq 2$. Wir nehmen an, daß die Form auf $G(N-1)$ bereits konst ist.

Wir def

$$(x,y) = (y,x) = 0$$

für $x \in G_{\pm N}$, $y \in G(N-1)$

// 10.6.09

Wir def $(x,y) = (y,x)$ für $x \in G_N$, $y \in G_{-N}$ folgendermaßen.

$x \in G_N$ läßt sich schreiben als

$$x = \sum_i [x_i, x_i'] \qquad x_i \in G_{K_i}, \; x_i' \in G_{N-K_i}$$
$$0 < K_i < N$$

und $y \in G_{-N}$ als

$$y = \sum_j [y_j, y_j'] \qquad y_j \in G_{-e_j}, \; y_j' \in G_{-N+e_j}$$
$$0 < e_j < N$$

Diese Zerlegungen sind i.a. nicht eindeutig.

Aufgrund der gefundenen Invarianz von (,) muß gelten

$$(x,y) = \sum_j ([x,y_j], y_j')$$

$$= \sum_i (x_i [x_i', y])$$

Wir können einen dieser Ausdrücke zur Def von (x,y) verwenden sofern er unabh von der Zerlegung ist.

Dazu reicht es z.z.

$$\sum_i (x_i [x_i' y]) = \sum_j ([x, y_j], y_j')$$

weil die linke Seite unabh von der Zerlegung von y und die rechte Seite unabh von der Zerlegung von x ist

Es ist

Diese Ausdrücke sind bereits def so daß wir $y = \sum [y_j, y_j']$ einsetzen können

$$\sum_i (x_i [x_i', y]) = \sum_{i,j} (x_i [x_i' [y_j, y_j']])$$

$$\sum_j ([x, y_j], y_j') = \sum_{i,j} ([[x_i x_i'] y_j, y_j'])$$

Es reicht also z.z

$$(x_i [x_i' [y_j, y_j']]) = ([[x_i x_i'] y_j, y_j'])$$

für alle i, j

Mit Hilfe der Jacobi Id und der

Inv auf $G(N-1)$ ist

$$(x_i\ [x_i'\ [y_j\ y_j']])$$

$$\underset{Jc}{=} (x_i, [[x_i'\ y_j], y_j']) + (x_i, [y_j, [x_i'\ y_j']])$$

$$\underset{Jnv}{=} ([x_i, [x_i'\ y_j]], y_j') + ([x_i\ y_j], [x_i'\ y_j'])$$

$$\underset{Jnv}{=} ([x_i\ [x_i'\ y_j]], y_j') + ([[x_i\ y_j]\ x_i'], y_j')$$

$$= -([x_i\ [y_j\ x_i']], y_j') - ([[y_j\ x_i]\ x_i'], y_j')$$

$$\underset{Jc}{=} -([y_j\ [x_i\ x_i']], y_j')$$

$$= ([[x_i\ x_i']\ y_j], y_j')$$

Also können wir die Bilinearform wie oben angegeben definieren. Sie erfüllt 1) und eine Fallunterscheidung zeigt, daß auch 2) gilt. Wir haben somit eine invariante sym Bilinearform auf $G(A)$ konst, die auf H nicht ausgeartet ist.

Sei $I = \{ x \in G(A) \mid (x,y) = 0 \ \forall_{y \in G(A)} \}$ der Kern von $(,)$. Dann ist I ein Ideal in $G(A)$ und

$$I = \bigoplus_{\alpha \in Q} I_\alpha$$

mit $I_\alpha = I \cap G_\alpha$. Da $(,)$ nicht ausg auf H ist gilt

$$I_0 = 0$$

Es folgt $I = 0$. $\square$

Folgendes Eindeutigkeitsresultat ist leicht zu beweisen

<u>Theorem</u>

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix und seien $(,)_1$ und $(,)_2$ zwei <u>inv</u> <u>nicht</u> <u>ausg</u> <u>sym</u> Bilinearformen auf $G(A)$. Sind $(,)_1$ und $(,)_2$ identisch auf H so auch auf $G(A)$.

Sei $A = DB$ eine symmetrisierbare komplexe $n \times n$-Matrix und $(\,,\,)$ eine wie oben konst nicht ausg sym Bilinearform auf H. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu : H &\longrightarrow H^* \\ h &\longmapsto (h,\ ) \end{aligned}$$

ein Isom und

$$\nu(h_i)(h) = (h, h_i) = \varepsilon_i \alpha_i(h)$$

d.h.

$$\underline{\nu(h_i) = \varepsilon_i \alpha_i}$$

Für die ind Bilinearform auf H^* gilt

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\nu^{-1}(\alpha_i), \nu^{-1}(\alpha_j))$$
$$= (h_i, h_j) / \varepsilon_i \varepsilon_j$$
$$= b_{ij} = a_{ij} / \varepsilon_j$$

3.2 Die Standardform

Sei A eine verallgem Cartan Matrix. Dann gibt es eine Zerlegung $A = DB$, so daß die ε_i pos. rationale Zahlen sind und B eine sym rationale Matrix ist. Ist A unzerlegbar so ist diese Faktorisierung eindeutig bis auf einen rationalen Faktor. Wir konst wie oben eine nicht ausg sym Bilinearform auf H.

Dann gilt

$$(\alpha_i \alpha_i) = a_{ii}/\varepsilon_i > 0$$

$$(\alpha_i \alpha_j) = a_{ij}/\varepsilon_i \leq 0 \quad \text{für } i \neq j$$

$$\nu(h_i) = \varepsilon_i \alpha_i = \frac{2}{(\alpha_i \alpha_i)} \alpha_i$$

und

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i \alpha_j)}{(\alpha_i \alpha_i)}$$

(Dies sind exakt die Formeln die wir aus der endl. dim Theorie kennen. Die Killing Form ind einen Isom $H \to H^*$. Das Urbild von $2\alpha_i/_{\alpha_i^2}$ unter dieser Abb ist h_i und $a_{ij} = \alpha_j(h_i) =$

$= 2(\alpha_j, \alpha_i) / \alpha_i^2$.)

Wir können die Form auf H <u>eindeutig</u> zu einer <u>ind nicht ausg sym</u> Bilinearform auf G(A) fortsetzen. Eine solche Form heißt <u>Standardform</u> auf G(A).