2. Definitionen

2.1 Realisierungen

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine komplexe $n \times n$-Matrix mit Rang ℓ.

Eine <u>Realisierung</u> von A ist ein Tripel $(H, \Pi, \Pi^\vee)$ mit

1) H ist ein endlich dim Vektorraum über $\mathbb{C}$

2) $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Menge von n lin. unabh Vektoren im H^*

3) $\Pi^\vee = \{h_1, \dots, h_n\}$ ist eine Menge

von n lin unabh Vektoren

in H.

4) $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$

5) $\dim H = 2n - l$

Die Bed 1) - 4) implizieren

$$\dim H \geq 2n - l$$

Zwei Realisierungen $(H, \Pi, \Pi^\vee)$, $(\tilde{H}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}^\vee)$ von A heißen <u>isomorph</u>, wenn es einen Isom $\phi : H \longrightarrow \tilde{H}$ gibt mit $\phi(h_i) = \tilde{h}_i$ und $\phi^*(\tilde{\alpha}_i) = \alpha_i$.

<u>Satz</u>

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Dann hat A bis auf Isomorphie genau eine Realisierung.

Ist $(H, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A, so ist $(H^*, \Pi^\vee, \Pi)$ eine Realisierung von A^T

// 27.5.09

Sind $(H_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ und $(H_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ Realisierungen von Matrizen A_1 und A_2, so ist $(H_1 \oplus H_2, \Pi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2, \Pi_1^\vee \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2^\vee\}$ eine Realisierung von $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{4}$ heißt <u>zerlegbar</u>, wenn es eine Perm $\sigma \in S_4$ gibt, so daß $A' = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ in eine direkte Summe von Matrizen zerfällt.

Wir bezeichnen Π als <u>Basis</u> und die Elemente aus Π als <u>einfache Wurzeln</u>. Wir def das <u>Wurzelgitter</u>

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}\alpha_i$$

und

$$Q^+ = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$$

Sei $\alpha = \sum k_i\alpha_i \in Q$. Def

$$\alpha \geq 0 \iff \alpha \in Q^+$$

$$\alpha > 0 \iff \alpha \in Q^+ \text{ und } \alpha \neq 0$$

und

$$ht(\alpha) = \sum k_i$$

2.2 Die Lie Algebra $\tilde{G}(A)$

Sei $A = (a_{ij})$ eine komplexe $n \times n$-Matrix und $(H, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A. Wir def die Lie Alg $\tilde{G}(A)$ als die Lie Alg mit Erzeugenden

$$e_i, f_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$h \quad , \quad h \in H$$

und Relationen

$h = \lambda h' + \mu h''$ für alle $h, h', h'' \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $h = \lambda h' + \mu h''$ in H

$[h, h'] = 0$ für alle $h, h' \in H$

$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \quad (i, j = 1, \ldots, n)$

$[h, e_i] = \alpha_i(h)\, e_i \quad (h \in H,\ i = 1, \ldots, n)$

$[h, f_i] = -\alpha_i(h)\, f_i \quad (h \in H,\ i = 1, \ldots, n)$

Wir bezeichnen die Menge der Erzeuger im Folgenden mit X und das Ideal in $FL(X)$ erzeugt von den Relationen mit R.

$$\tilde{G}(A) = FL(X) / R$$

Aus der Eindeutigkeit der Realisierung folgt, daß $\tilde{G}(A)$ nur von A abhängt.

Satz

Die Abb

$$
\begin{array}{lll}
h \longmapsto -h & & (h \in H) \\
e_i \longmapsto -f_i & & (i = 1, \dots, n) \\
f_i \longmapsto -e_i & & (i = 1, \dots, n)
\end{array}
$$

läßt sich eindeutig zu einem Automorphismus $\tilde{\omega}$ von $\tilde{G}(A)$ fortsetzen. Es gilt $\tilde{\omega}^2 = 1$.

Bew

Die Abb def eine Abb

$$\tilde{\omega} : X \longrightarrow FL(X)$$

Somit gibt es einen eindeutigen Hom $FL(X) \longrightarrow FL(X)$ mit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\omega} & FL(X) \\ \downarrow & \nearrow & \\ FL(X) & & \end{array}$$

Wir bezeichnen diese Fortsetzung von ω auf $FL(X)$ ebenfalls mit ω.

Es gilt

$$\tilde{\omega}(R) \subset R$$

Es reicht dies für die Erzeugenden von R zu beweisen

Beispielsweise ist

$$\tilde{\omega}([e_i f_j] - \delta_{ij} h_i)$$

$$= [\tilde{\omega}(e_i), \tilde{\omega}(f_j)] - \delta_{ij}\tilde{\omega}(h_i)$$

$$= [f_i, e_j] + \delta_{ij} h_i$$

$$= -(\underbrace{[e_j, f_i] - \delta_{ij} h_i}_{\in R}) \in R$$

Somit haben wir eine ind Abb

$$\tilde{\omega} : FL(X)/R \longrightarrow FL(X)/R$$

d.h.

$$\tilde{\omega} : \tilde{G}(A) \longrightarrow \tilde{G}(A)$$

Da $\tilde{\omega}^2$ trivial auf e_i, f_i, h

operiert, ist $\hat{\omega}^2 = 1$. Somit ist $\hat{\omega}$ ein Automorphismus.

$\square$

Sei $\hat{N}^-$ die Unteralg von $\hat{G}(A)$ erzeugt von den f_i, $\hat{N}^+$ die Unteralg erz von den e_i und $\hat{H}$ die Unteralg erz von den h. Dann

$$\hat{\omega}(\hat{N}^-) = \hat{N}^+$$
$$\hat{\omega}(\hat{N}^+) = \hat{N}^-$$
$$\hat{\omega}(\hat{H}) = \hat{H}$$

Wir konst eine Darstellung von $\hat{G}(A)$. Sei V ein n-dim

Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ und

$$T(V) = \bigoplus_{s=0}^{\infty} T^s(V)$$

mit

$$T^0(V) = \mathbb{C}1$$

und

$$T^s(V) = V \otimes \ldots \otimes V$$

für $s > 0$ die Tensoralg über V.

Für $\lambda \in H^*$ def wir eine Operation von x auf $T(V)$ durch

$$f_i(a) = v_i \otimes a \quad \text{für alle } a \in T(V)$$

$$h(1) = \lambda(h)1$$

$$h(e_i) = (\lambda - \alpha_i)(h)\, v_i \qquad \text{und}$$

$$h(v_i \otimes a) = -\alpha_i(h)\, v_i \otimes a + v_i \otimes h(a)$$

$$\text{für } a \in T^s(V), \; s \geq 1$$

$$e_i(1) = 0$$

$$e_i(v_j) = \delta_{ij}\, \lambda(h_i)\, 1$$

$$e_i(v_j \otimes a) = \delta_{ij}\, h_i(a) + v_j \otimes e_i(a)$$

$$\text{für } a \in T^s(V), \; s \geq 1$$

Es folgt z. B.

$$h_i(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_s}) = (\lambda - (\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_s}))\, v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_s}$$

Wir erhalten so eine Abb

$$X \longrightarrow \operatorname{End} T(V)$$

Satz

Die Abb $\theta_\lambda : X \longrightarrow \mathrm{End}\, T(V)$ läßt sich eindeutig zu einer Darst von $\tilde{G}(A)$ auf $T(V)$ fortsetzen.

Bew

Die Abb $\theta_\lambda : X \longrightarrow \mathrm{End}\, T(V)_L$ faktorisiert durch $FL(X)$, d.h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta_\lambda"] \arrow[d] & \mathrm{End}\, T(V)_L \\ FL(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Die Fortsetzung $FL(X) \longrightarrow \mathrm{End}\, T(V)_L$ bez wir ebenfalls mit θ_λ. Sie ind eine Darst

$$\tilde{G}(A) = FL(X)/_R \longrightarrow \operatorname{End} T(V)_L$$

weil $\underline{\Theta_\lambda(R) = 0}$.

Beispielsweise ist

$$\Theta_\lambda([e_i f_j] - \delta_{ij} h_i)(a)$$

$$= ([\Theta_\lambda(e_i), \Theta_\lambda(f_j)] - \delta_{ij}\Theta_\lambda(h_i))(a)$$

$$= \Theta_\lambda(e_i)\Theta_\lambda(f_j)(a) - \Theta_\lambda(f_j)\Theta_\lambda(e_i)(a)$$
$$- \delta_{ij}\Theta_\lambda(h_i)(a)$$

$$= \Theta_\lambda(e_i)(v_j \otimes a) - v_j \otimes \Theta_\lambda(e_i)(a)$$
$$- \delta_{ij}\Theta_\lambda(h_i)(a)$$

$$= \delta_{ij}\Theta_\lambda(h_i)(a) + v_j \otimes \Theta_\lambda(e_i)(a)$$
$$- v_j \otimes \Theta_\lambda(e_i)(a) - \delta_{ij}\Theta_\lambda(h_i)(a)$$

$= 0$

Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß X die Lie Alg $\tilde{G}(A)$ erzeugt

□

<u>Korollar</u>

Die Abb $H \longrightarrow \hat{H}$, $h \longrightarrow h$ ist ein Isom

<u>Bew</u>

Die Abb ist surj. Wird $h \in H$ 0 in $\hat{H}$ so ist

$$h(1) = \lambda(h) 1 = 0$$

für alle $\lambda \in H^*$ also $h = 0$.

$\square$

<u>Satz</u>

$\tilde{N}^-$ ist die freie Lie Alg erz von den f_i

<u>Bew</u>

Die Einschränkung von θ_λ auf $\tilde{N}^-$ liefert eine Darst von $\tilde{N}^-$ auf $T(V)$. Diese ist unabh von λ.

$$\tilde{N}^- \xrightarrow{\theta\ (=\theta_\lambda)} \operatorname{End} T(V)_L$$

Def

$$\phi : \tilde{N}^- \longrightarrow T(V)_L$$

$$y \longmapsto y(1) \quad (= \Theta(y)(1))$$

Dann ist ϕ ein Hom von Lie Alg:

$\phi([y_1, y_2])$

$$= \Theta([y_1, y_2])(1)$$

$$= [\Theta(y_1), \Theta(y_2)](1)$$

$$= \Theta(y_1)\Theta(y_2)(1) - \Theta(y_2)\Theta(y_1)(1)$$

$$= \Theta(y_1)(1) \otimes \Theta(y_2)(1)$$

$$- \Theta(y_2)(1) \otimes \Theta(y_1)(1)$$

$$= [\Theta(y_1)(1), \Theta(y_2)(1)]$$

$$= [\phi(y_1), \phi(y_2)]$$

weil

$$\Theta(y_1)\,\Theta(y_2)\,1 = \Theta(y_1)(1) \otimes \Theta(y_2)(1)$$

Hier geht ein, daß Θ eine Darst ist und f_i durch Linksmult mit v_i operiert

(Bsp :

$$\Theta(f_i)(a) = f_i \otimes a = \Theta(f_i)\,1 \otimes a$$

$$\Theta([f_i, f_j])(a) = \Theta(f_i)\,\Theta(f_j)(a) - \Theta(f_j)\,\Theta(f_i)(a)$$

$$= v_i \otimes v_j \otimes a - v_j \otimes v_i \otimes a$$

$= \Theta([f_i, f_j])(1) \otimes a$

etc)

Das Bild von ϕ ist eine Unteralg von $T(V)_L$ und enthält $v_1, \dots, v_n$.

Somit ist $FL(v_1, \dots, v_n) \subset \mathrm{Im}(\phi)$

Da ϕ ein Hom mit $\phi(f_i) = v_i$ ist, folgt die Gleichheit. Also

$$\tilde{N}^- \xrightarrow{\phi} FL(v_1, \dots, v_n)$$

Andererseits läßt sich die Abb $v_i \longmapsto f_i$ zu einem Hom

$$FL(v_1, \ldots, v_n) \xrightarrow{\phi'} \tilde{N}^-$$

fortsetzen. Dann ist

$$\phi \circ \phi' = 1$$

$$\phi' \circ \phi = 1$$

Also ist ϕ ein Isom

$\square$

Anwendung von $\tilde{\omega}$ liefert

<u>Satz</u>

$\tilde{N}^+$ ist die freie Lie Alg erz

von $e_1, \ldots, e_n$

<u>Satz</u>

$$\tilde{G}(A) = \tilde{N}^- \oplus H \oplus \tilde{N}^+$$

(direkte Summe von Vektor-räumen)

<u>Bew</u>

$I = \tilde{N}^- + H + \tilde{N}^+$ ist ein Ideal in $\tilde{G}(A)$ Dieses Ideal enthält die Erzeuger von $\tilde{G}(A)$, also

$$\tilde{G}(A) = I$$

Sei

$$\begin{array}{ccccccc} u = & n^- & + & h & + & n^+ & = 0 \\ & \cap & & \cap & & \cap & \\ & \tilde{N}^- & & H & & \tilde{N}^+ & \end{array}$$

z.z. $u^- = h = u^+ = 0$

Aus $u = 0$ folgt $\theta_\lambda(u) = 0$ in

$\mathrm{End}\, T(V)$ und

$$\theta_\lambda(u)(1) = \underbrace{\phi(u^-)}_{\in \bigoplus_{s \geq 1} T^s(V)} + \underbrace{\lambda(h)1}_{\in T^0(V)} = 0$$

Also

$$\lambda(h) = 0$$

Da λ beliebig ist, folgt

$$h = 0$$

Dann ist

$$\phi(u^-) = 0$$

Die Abb $\phi : \tilde{N}^- \longrightarrow FL(v_1, \dots, v_n)$

ist ein Isom. Also

$$n^- = 0$$

Dann

$$n^+ = 0$$

$\square$

// 3.6.09

Für $\alpha \in Q$ def

$$\tilde{G}_\alpha = \{ x \in \tilde{G}(A) \mid [h, x] = \alpha(h)\, x \quad \forall_{h \in H} \}$$

Satz

1) $\tilde{G}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \tilde{G}_\alpha$

2) $\dim \tilde{G}_\alpha < \infty$

3) $\tilde{G}_0 = H$

4) Ist $\alpha \neq 0$ und $\tilde{G}_\alpha \neq 0$ so folgt $\alpha \in Q^+$ oder $-\alpha \in Q^+$

5) $[\tilde{G}_\alpha, \tilde{G}_\beta] \subset \tilde{G}_{\alpha+\beta}$

<u>Bew</u>

Sei x ein Produkt von $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$. Dann ist x in $\tilde{G}_\alpha$ mit $\alpha = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s}$. Sei $h \in H$. Dann ist $h \in \tilde{G}_0$.

Somit

$$\tilde{G}(A) \subset \sum_{\alpha \in Q} \tilde{G}_\alpha \subset \tilde{G}(A)$$

Also

$$\tilde{G}(A) = \sum_{\alpha \in Q} \tilde{G}_\alpha$$

Ein Standardargument zeigt, daß die Summe direkt ist.

Aus der Jacobi Id folgt

$$[\tilde{G}_\alpha, \tilde{G}_\beta] \subset \tilde{G}_{\alpha+\beta}$$

Es ist

$$\tilde{N}^- \subset \bigoplus_{\alpha<0} \tilde{G}_\alpha$$

$$H \subset G_0$$

$$\tilde{N}^+ \subset \bigoplus_{\alpha>0} \tilde{G}_\alpha$$

Wegen

$$\tilde{G}(A) = \tilde{N}^- \oplus H \oplus \tilde{N}^+$$

$$\subset \left(\bigoplus_{\alpha < 0} \tilde{G}_\alpha \right) \oplus \tilde{G}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha > 0} \tilde{G}_\alpha \right)$$

$$\subset \tilde{G}(A)$$

haben wir überall Gleichheit, d.h.

$$\tilde{N}^- = \bigoplus_{\alpha < 0} \tilde{G}_\alpha$$

$$H = \tilde{G}_0$$

$$\tilde{N}^+ = \bigoplus_{\alpha > 0} \tilde{G}_\alpha$$

Sei $\alpha = k_1 \alpha_1 + \ldots + k_n \alpha_n > 0$. Dann wird $\tilde{G}_\alpha$ als Vektorraum erzeugt von Produkten bestehend aus

k_1 Faktoren $e_1, \ldots, k_n$ Faktoren e_n.

Da es nur endlich viele Produkte dieser Form gibt, ist $\dim \hat{G}_\alpha < \infty$.

Analog für $\alpha < 0$.

$\square$

Insbesondere ist

$$\hat{G}_{\alpha_i} = \mathbb{C} e_i$$

$$\hat{G}_{-\alpha_i} = \mathbb{C} f_i$$

$$\hat{G}_{k\alpha_i} = 0 \qquad \text{für } |k| > 1$$

<u>Satz</u>

Sei H eine abelsche Lie Alg und V ein diagonalisierbarer H-Modul, d.h.

$$V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$$

mit $V_\lambda = \{ v \in V \mid h.v = \lambda(h) v \ \forall_{h \in H} \}$

Sei U ein Untermodul von V. Dann

$$U = \bigoplus_{\lambda \in H^*} (U \cap V_\lambda)$$

<u>Bew</u>

Sei $u \in U$ Dann kann u geschrieben werden als

$$u = u_1 + \ldots + u_m$$

mit $u_i \in V_{\lambda_i}$ mit paarweise verschiedenen λ_i. Für $i \neq j$ def

$H_{ij} = \{ h \in H \mid (\lambda_i - \lambda_j)(h) = 0 \}$. Dann ist H_{ij} eine Hyperebene in H. Somit ist $H \neq \bigcup_{i \neq j} H_{ij}$. Es gibt also ein $h \in H$, so daß die $\lambda_i(h)$ verschieden sind. Es gilt

$$u = u_1 + \dots + u_m$$

$$h.u = \lambda_1(h) u_1 + \dots + \lambda_m(h) u_m$$

$$\vdots$$

$$h^{m-1}.u = \lambda_1(h)^{m-1} u_1 + \dots + \lambda_m(h)^{m-1} u_m$$

Die Matrix

$$\begin{matrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(h) & & \lambda_m(h) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1(h)^{m-1} & & \lambda_m(h)^{m-1} \end{matrix}$$

hat Determinante $\neq 0$ (Vandermonde). Somit kann jedes u_i als Linearkombination von $u, h.u, \ldots, h^{m-1}.u$ geschrieben werden, d.h. $u_i \in U \cap V_{\lambda_i}$.

$\square$

Damit folgt

<u>Satz</u>

Sei I ein Ideal in $\hat{G}(A)$. Dann ist

$$I = \bigoplus_{\alpha \in Q} (I \cap \hat{G}_\alpha)$$

Satz

Es gibt ein eindeutiges max Ideal J in $\tilde{G}(A)$ welches H trivial schneidet. Es gilt

$$J = (J \cap \tilde{N}^-) \oplus (J \cap \tilde{N}^+)$$

(direkte Summe von Idealen) und

$$\tilde{\omega}(J) = J$$

$$\tilde{\omega}(J \cap \tilde{N}^{\mp}) = J \cap \tilde{N}^{\pm}$$

Weiterhin sind e_i und f_i nicht in J.

2.3 Die Lie Alg $G(A)$

Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix,

(H, Π, Π') eine Realisierung von A und $\tilde{G}(A)$ die in 2.2. konst Lie Alg zu A.

Sei J das max Ideal in $\tilde{G}(A)$, welches H trivial schneidet Def

$$G(A) = \tilde{G}(A) / J$$

A wird als <u>verallgem Cartan Matrix</u> bezeichnet wenn

1) $a_{ii} = 2$

2) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ für $i \neq j$

3) $a_{ij} = 0$ impliziert $a_{ji} = 0$

Ist A eine verallgemeinerte Cartan Matrix, so wird G(A) als <u>Kac-Moody Alg</u> zu A bez.

Da $\tilde{G}(A)$ und J Q-graduiert sind, gilt

$$G(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} G_\alpha$$

mit $G_\alpha = \tilde{G}_\alpha / J_\alpha$ wobei $J_\alpha = J \cap \tilde{G}_\alpha$

Weiterhin ist

1) $G_0 = \tilde{G}_0 = H$

2) $G_{\alpha_i} = \tilde{G}_{\alpha_i} = \mathbb{C} e_i$,

$G_{-\alpha_i} = \tilde{G}_{-\alpha_i} = \mathbb{C} f_i$

Wir bezeichnen die Bilder von H, e_i und f_i in $G(A)$ auch mit H, e_i, f_i

3) $G_\alpha = 0$ außer $\alpha = 0$ oder $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$.

4) $G_\alpha = \{ x \in G(A) \mid [h, x] = \alpha(h) x \quad \forall_{h \in H} \}$

(„$\subseteq$" ist klar. Es folgt „$=$")

$\dim G_\alpha < \infty$

5) Ein $\alpha \in Q \setminus \{0\}$ mit $G_\alpha \neq 0$ heißt <u>Wurzel</u> und $\dim G_\alpha$ heißt <u>Multiplizität</u>. Eine Wurzel ist entweder pos. oder neg., d.h. die Menge der Wurzeln zerfällt in

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$$

6) Die Vektorräume

$$N^\pm = \hat{N}^\pm / (J \cap \hat{N}^\pm) = \bigoplus_{\pm\alpha > 0} G_\alpha$$

sind die Unteralg von $G(A)$ erzeugt von den e_i bzw f_i.
Es ist

$$G(A) = N^- \oplus H \oplus N^+$$

H heißt Cartan Unteralg von $G(A)$

7) Sei $\alpha > 0$. Dann wird $G(A)$ erzeugt von den Elementen der

Form $[e_{i_1}[e_{i_2}[\ldots]]]$ mit $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_s} = \alpha$. Insbesondere ist

$G_{k\alpha_i} = 0$ für $|k| > 1$

8) Alle Ideale in $G(A)$ sind Q-graduiert und $G(A)$ enthält kein Ideal $J \neq 0$ mit $J \cap H = 0$.

9) Da J invariant unter $\tilde{\omega}$ ist, gibt es eine Involution ω auf $G(A)$ mit

$$\omega(e_i) = -f_i$$
$$\omega(f_i) = -e_i$$
$$\omega(h) = -h$$

Es gilt $\omega(G_\alpha) = G_{-\alpha}$ ($\omega(G_\alpha) \subset G_{-\alpha}$, $\omega(G_{-\alpha}) \subset G_\alpha$) Es folgt $\omega(N^\pm) = N^\mp$ und $\Delta_- = -\Delta_+$.

Die abgeleitete Lie Alg

$$G'(A) = [G(A), G(A)]$$

ist gleich der Unteralg von $G(A)$ erzeugt von den e_i und f_i. Es ist

$$G'(A) = N^- \oplus H' \oplus N^+$$

mit

$$H' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} h_i$$

Aus 7) und der Tatsache, daß

eine Wurzel entweder pos oder neg ist folgt

Satz

Ist $\beta \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ so gilt $(\beta + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta \subset \Delta_+$.

Wir bestimmen das Zentrum von $G(A)$.

Satz // 8.6.09

Sei $x \in N^+$ so daß $[x f_i] = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann ist $x = 0$.

Ist $y \in N^-$, so daß $[y, e_i] = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, so folgt $y = 0$

Bew

Sei $x = \sum_{\alpha > 0} x_\alpha$ mit $x_\alpha \in G_\alpha$. Aus

$$0 = [x, f_i] = \sum_{\alpha > 0} [x_\alpha, f_i]$$

folgt $[x_\alpha, f_i] = 0$. Sei $I = U(G(A))\, x_\alpha$ das Ideal erzeugt von x_α ($U(G(A))$ operiert via ad) Aus

$$G(A) = N^+ \oplus H \oplus N^-$$

folgt

$$U(G(A)) = U(N^+) \otimes U(H) \otimes U(N^-)$$

Wir haben gesehen daß

$$U(N^-)\, x_\alpha = \mathbb{C}\, x_\alpha$$

Es folgt

$$I = U(N^+)\, x_\alpha \subset N^+$$

Also $I \cap H = 0$ und $I = 0$, d.h.

$x_\alpha = 0$. Es folgt $x = 0$.

Der Bew der anderen Beh ist analog.

$\square$

Damit zeigt man

<u>Satz</u>

Sei

$$Z = \{ h \in H \mid \alpha_i(h) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

Dann ist $\dim Z = n - \ell$ und Z liegt in H'. Weiterhin ist Z das Zentrum von $G(A)$ und von $G'(A)$.

Eine weitere Folgerung ist

Satz

Seien I_1, I_2 disjunkte Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$ so daß $a_{ij} = a_{ji} = 0$ für $i \in I_1$, $j \in I_2$. Sei $\beta_1 = \sum_{i\in I_1} k_i^{(1)} \alpha_i$ und $\beta_2 = \sum_{j\in I_2} k_j^{(2)} \alpha_j$. Ist $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ eine Wurzel von $G(A)$, so ist $\beta_1 = 0$ oder $\beta_2 = 0$.