10. Darstellungstheorie

Sei A eine beliebige komplexe $n \times n$-Matrix. Dann zerfällt

$$G(A) = N^- \oplus H \oplus N^+$$

Ein $G(A)$-Modul V heißt <u>H-diag</u> wenn $V = \bigoplus_{\mu \in H^*} V_\mu$ mit

$$V_\mu = \{ v \in V \mid h.v = \mu(h)v \quad \forall_{h \in H} \}$$

Ist $V \neq 0$ so heißt <u>λ Gewicht</u>

Wir bezeichnen die Menge der Gewichte mit $P(V)$.

Es gilt

$$G_\alpha V_\lambda \subset V_{\alpha + \lambda}$$

Wir def eine partielle Ordnung auf H^* durch

$$\mu \leq \lambda \iff \lambda - \mu \in Q_+$$

Für $\lambda \in H^*$ setzen wir

$$D(\lambda) = \{ \mu \in H^* \mid \mu \leq \lambda \}$$
$$= \lambda - Q_+$$

Ist F eine Teilmenge von H^* so def wir

$$D(F) = \bigcup_{\lambda \in F} D(\lambda)$$

10.1 Die Kategorie $\mathcal{O}$

Die Objekte in $\mathcal{O}$ sind $G(A)$-Moduln V mit

1) V ist H-diag mit endlich-dim Gewichtsräumen

2) Es gibt eine endliche Teilmenge $F \subset H^*$ mit $P(V) \subset D(F)$

Die Morphismen in $\mathcal{O}$ sind die $G(A)$-Modul Hom

Satz

1) Ist V in $\mathcal{O}$ und U ein Untermodul von V, so ist U in $\mathcal{O}$ und

$V/_U$ in $\mathcal{O}$.

2) Sind V_1, V_2 in $\mathcal{O}$, so auch $V_1 \oplus V_2$ und $V_1 \otimes V_2$.

<u>Satz</u>

Sei V in $\mathcal{O}$. Dann ist V beschränkt.

Beispiele für Moduln in $\mathcal{O}$ sind Höchstgewichtsmoduln.

<u>10.2 Höchstgewichtsmoduln</u>

Ein $G(A)$-Modul V heißt <u>Höchstgewichtsmodul</u> mit <u>höchstem Gewicht</u> $\Lambda \in H^*$, wenn es ein $v_\Lambda \in V$

gibt mit

1) $h v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda \quad \forall_{h \in H}$

$N^+ v_\Lambda = 0$

2) $V = \mathcal{U}(G(A)) v_\Lambda$

v_Λ heißt Höchstgewichtsvektor.

Wegen

$\mathcal{U}(G(A)) = \mathcal{U}(N^-) \otimes \mathcal{U}(H) \otimes \mathcal{U}(N^+)$

kann die zweite Bed ersetzt werden durch

2') $V = \mathcal{U}(N^-) v_\Lambda$

Einige Folgerungen

1) $V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} V_\mu$, $V_\lambda = \mathbb{C} v_\lambda$

$\dim V_\mu < \infty$

V ist in $\mathcal{O}$

2) V hat einen eindeutigen max echten Untermodul

3) Jeder nichttrivi Quotient von V ist wieder ein Höchstgewichtsmod mit höchstem Gew λ.

Sei $\lambda \in H^*$. Wir konst nun einen Höchstgewichtsmodul $M(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ.

Sei $\mathbb{C}v_\Lambda$ ein 1-dim Vektorraum.

Def eine Operation von $H \oplus N^+$ auf $\mathbb{C}v_\Lambda$ durch

$$h . v_\Lambda = \Lambda(h)\, v_\Lambda$$

$$N^+ v_\Lambda = 0$$

Dann ist der <u>induzierte Modul</u>

$$M(\Lambda) = U(G(A)) \otimes_{U(H \oplus N^+)} \mathbb{C}v_\Lambda$$

$$= U(G(A)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_\Lambda / T$$

mit

$$T = \langle xy \otimes v_\Lambda - x \otimes y v_\Lambda \mid x \in U(G(A)),\ y \in U(H \oplus N^+) \rangle$$

ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gewicht Λ.

$M(\Lambda)$ heißt <u>Verma Modul</u>

($U(G(A))$ operiert durch Links-multiplikation.)

// 8.7.09

<u>Satz</u>

$M(\Lambda)$ ist ein freier $U(N^-)$-Modul vom Rang 1 erzeugt von v_Λ, d.h. jedes Element $v \in M(\Lambda)$ läßt sich eindeutig schreiben als $v = y v_\Lambda$ für ein $y \in U(N^-)$.

Satz

Sei $V(\Lambda)$ ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gew Λ. Dann ist $V(\Lambda)$ ein Quotient von $M(\Lambda)$.

Bew

Sei $V(\Lambda) = U(N^-) v_\Lambda$. Dann ist die Abb

$$\begin{aligned} M(\Lambda) &\longrightarrow V(\Lambda) \\ y \cdot v_\Lambda &\longmapsto y \cdot v_\Lambda \end{aligned}$$

ein Modulhom.

$\square$

$M(\Lambda)$ hat einen eindeutigen max Untermodul $M(\Lambda)'$. Der Quotient

$$L(\Lambda) = M(\Lambda) / M(\Lambda)'$$

ist irreduzibel.

Satz

1) Sei V ein irred Höchstgewichts-modul mit höchstem Gewicht Λ. Dann ist V isom zu $L(\Lambda)$.

2) $L(\Lambda)$ und $L(\Lambda')$ sind genau dann isom wenn $\Lambda = \Lambda'$

Bew

1) Es gibt einen Untermodul N von $M(\Lambda)$ so daß $M(\Lambda)/_N \cong V$. Da V irred ist, ist N max. Aus der

Eindeutigkeit von N folgt

$M(\Lambda)/_N \cong L(\Lambda)$.

2) Sei $\varphi : L(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda')$ ein Modulisom. Dann ist für $v \in L(\Lambda)_\mu$

$$h.\varphi(v) = \varphi(h.v) = \mu(h)\,\varphi(v)$$

für alle $h \in H$. Also

$$\varphi(L(\Lambda)_\mu) \subset L(\Lambda')_\mu$$

Dasselbe Arg mit φ^{-1} liefert

$$\varphi^{-1}(L(\Lambda')_\mu) \subset L(\Lambda)_\mu$$

Es folgt

$$\varphi(L(\Lambda)_\mu) = L(\Lambda')_\mu$$

Insbesondere ist Λ also Gewicht von $L(\Lambda')$, d.h. $\Lambda \leq \Lambda'$.

Andersherum ist Λ' Gewicht von $L(\Lambda)$, d.h. $\Lambda' \leq \Lambda$.

Also $\Lambda = \Lambda'$.

Die andere Richtung ist klar. $\square$

<u>Bsp</u>

Für $\Lambda = 0$ ist $L(\Lambda)$ der triv 1-dim Modul.

<u>Satz</u>

Sei V ein irred Modul in $\mathcal{O}$. Dann ist V isom zu $L(\Lambda)$ für ein $\Lambda \in H^*$.

Bew

V hat ein max Gewicht Λ. Sei v ein Vektor in $V_\Lambda \setminus \{0\}$. Dann ist

$$e_i v \in V_{\alpha_i + \Lambda}$$

Wegen $\alpha_i + \Lambda \geq \Lambda$ und $\alpha_i + \Lambda \neq \Lambda$ folgt

$$e_i v = 0$$

Der Höchstgewichtsmodul $U(G(A))v$ ist ein Untermodul von V. Da V irred ist, folgt $V = U(G(A))v$. Also $V = L(\Lambda)$.

$\square$

Ein Modul in $\mathcal{O}$ besitzt i.a.

keine Kompositionsreihe (d.h. eine Reihe von Untermoduln

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_t = V$$

so daß jeder Quotient irred ist).

Es gilt aber

<u>Satz</u>

Sei V in $\mathcal{O}$ und $\lambda \in H^*$. Dann gibt es eine Filtrierung von Untermoduln

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_t = V$$

und eine Teilmenge $J \subset \{1, \ldots, t\}$ so daß

1) Ist $j \in J$, dann gilt $V_j / V_{j-1} \cong L(\lambda_j)$ für ein $\lambda_j \geq \lambda$

2) Ist $j \notin J$, dann gilt $(V_j / V_{j-1})_\mu = 0$ für alle $\mu \geq \lambda$.

<u>Bew</u>

V hat nur endlich viele Gewichte $\mu \geq \lambda$. Def

$$a(V, \lambda) = \sum_{\mu \geq \lambda} \dim (V_\mu)$$

Wir beweisen die Beh durch Ind über $a(V, \lambda)$.

Sei $a(V, \lambda) = 0$. Dann ist

$$0 = V_0 \subset V_1 = V$$

die gewünschte Filtrierung.

Sei $a(V,\lambda) > 0$. Wähle ein max Element $\mu \in F$ mit $\mu \geq \lambda$ und ein $v \in V_\mu \setminus \{0\}$. Dann ist

$$h.v = \mu(h)v \quad \forall_{h \in H}$$

$$N^+ v = 0$$

d.h.

$$U = U(G(A))v$$

ist ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gewicht μ. U hat einen eindeutigen max echten Untermodul U'. Es ist

$$0 \subset U' \subset U \subset V$$

und

$$U/U' = L(\mu) \quad , \mu > \lambda$$

Wegen $a(U',\lambda) < a(U,\lambda)$ und

$a(V/U,\lambda) < a(V,\lambda)$ liefert die

Ind hyp eine Filtrierung für U'

$$0 = U_0' \subset U_1' \subset \ldots \subset U_q' = U' \quad (*)$$

und für V/U

$$0 = (V/U)_0 \subset (V/U)_1 \subset \ldots \subset (V/U)_r = V/U$$

Def V_j als das Urbild von $(V/U)_j$

unter der Kan Proj $V \to V/U$.

Dann erhalten wir eine Reihe

$$U = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r = V \qquad (**)$$

Aneinanderhängen der Reihen (*) und (**) liefert die gewünschte Filtrierung.

□

Sei V in $\mathcal{O}$ und $\mu \in H^*$. Wähle ein $\lambda \in H^*$ mit $\mu \geq \lambda$ und sonst eine Filtrierung von V wie im letzten Satz. Bezeichne mit $[V : L(\mu)]$ die Anzahl der j in J mit $\lambda_j = \mu$. Dann ist $[V : L(\mu)]$

unabh von der Wahl der Filtrierung und der Wahl von λ. Diese Zahl heißt <u>Multiplizität</u> von $L(\mu)$ in V.

<u>Bsp</u>

Sei V ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gew Λ. Dann ist

$$[V : L(\Lambda)] = 1$$

(V hat einen eindeutigen max echten Untermodul N. Betrachte $0 \subset N \subset V$.)

Sei V in $\mathcal{O}$ und λ ein Gewicht von V. Ein Vektor $v \in V_\lambda$ heißt

<u>primitiv</u>, wenn es einen Untermodul U von V gibt, so daß

$$v \notin U$$

$$N^+ v \subset U$$

λ heißt in diesem Fall <u>primitives Gewicht</u>

<u>Bsp</u>

Sei λ Gewicht und $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $N^+ v = 0$. Dann ist v primitiv (wähle $U = 0$). Insbesondere sind Höchstgewichtsvektoren von Höchstgewichtsmoduln primitiv.

Satz

Sei V in $\mathcal{O}$ und $\mu \in H^*$. Dann ist $[V : L(\mu)] > 0$ genau dann wenn μ primitives Gewicht ist.

10.3 Charaktere

Wir def die Alg $\mathcal{E}$ über $\mathbb{C}$. Die Elemente von $\mathcal{E}$ sind die Reihen

$$\sum_{\lambda \in H^*} c_\lambda e^\lambda$$

mit $c_\lambda \in \mathbb{C}$ und $c_\lambda = 0$ für λ außerhalb $D(\mathcal{F})$ für ein geeignetes endl. $\mathcal{F}$. Wir def

$$e^\lambda e^\mu = e^{\lambda + \mu}$$

Damit wird $\mathcal{E}$ eine kommutative assoziative Alg über $\mathbb{C}$. Die Elemente e^λ, $\lambda \in H^*$ sind lin unabh.

Sei V in $\mathcal{O}$. Wir def den Charakter von V als

$$ch(V) = \sum_{\lambda \in H^*} \dim(V_\lambda)\, e^\lambda$$

Dann ist $ch(V)$ in $\mathcal{E}$.

Satz

Sei $\Lambda \in H^*$. Dann ist

$$ch(M(\Lambda)) = e^\Lambda \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{mult(\alpha)}$$

Bew

Für jedes $\alpha \in \Delta_+$ wähle eine Basis $e_{-\alpha,i}$, $i=1,\dots,\mathrm{mult}(\alpha)$ von $G_{-\alpha}$.

Dann ist

$$\prod_{\alpha\in\Delta_+} \prod_{i=1}^{\mathrm{mult}(\alpha)} e_{-\alpha,i}^{n_{\alpha,i}}$$

mit $n_{\alpha,i} \in \mathbb{Z}$, $n_{\alpha,i} \geq 0$ eine Basis von $U(N^-)$. Da $M(\Lambda)$ ein freier $U(N^-)$-Modul vom Rang 1 erzeugt von v_Λ ist, bilden die Vektoren

$$\prod_{\alpha\in\Delta_+} \prod_{i} e_{-\alpha,i}^{n_{\alpha,i}} v_\Lambda \qquad (*)$$

eine <u>Basis</u> von $M(\Lambda)$. Die Elemente (*) mit

$$\sum_{\alpha \in \Delta_+} \left(\sum_{i=1}^{mult(\alpha)} n_{\alpha,i} \right) \alpha = \mu$$

Bilden eine Basis von $M(\Lambda)_{\Lambda-\mu}$.
Somit ist der Charakter von $M(\Lambda)$

$$ch(M(\Lambda))$$

$$= e^{\Lambda} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots)^{mult(\alpha)}$$

weil die Anzahl der e^{μ} in

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots)^{mult(\alpha)}$$

genau gleich der Anzahl der

Mengen $\{n_{\alpha,i}\}$ mit

$$\sum_{\alpha\in\Delta_+}\left(\sum_i n_{\alpha,i}\right)\alpha = \mu$$

ist. Die Beh folgt nun aus

$$1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

□

// 8.7.09

<u>Satz</u>

Sei V in $\mathcal{O}$. Dann ist

$$ch(V) = \sum_{\lambda\in H^*} [V : L(\lambda)]\, ch(L(\lambda))$$

Sei A nun <u>symmetrisierbar</u> und

$(,)$ eine Standardform auf $G(A)$.

Der Casimir Operator

$$\Omega = 2\nu^{-1}(\rho) + \sum u^i u_i + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \sum_i x^i_{-\alpha} x^i_\alpha$$

operiert auf den Moduln in $\mathcal{O}$ weil diese beschränkt sind.

<u>Satz</u>

1) Sei V ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gew Λ. Dann

$$\Omega = ((\Lambda+\rho)^2 - \rho^2)\, 1_V$$

2) Sei V ein Modul in $\mathcal{O}$ und

v primitiver Vektor mit Gew λ

Dann gibt es einen Untermodul

$U \subset V$ mit $v \notin U$ und

$$\Omega(v) = ((\lambda+\delta)^2 - \delta^2)\, v \mod U$$

<u>Bew</u>

Wir brauchen nur 2) zu beweisen.

Es gilt

$$\Omega(v) = 2\,\gamma^{-1}(\delta)\,v + \sum_i u^i u_i v + 2 \sum_{\alpha\in\Delta_+} \sum_i x^i_{-\alpha} \underbrace{x^i_{\alpha} v}_{\in U}$$

$$= 2\,\lambda(\gamma^{-1}(\delta))\,v + \sum u^i u_i v \mod U$$

$$= (2(\lambda,\delta) + (\lambda,\lambda))\, v \mod U$$

$$= \left((\lambda+\delta)^2 - \delta^2 \right) v \quad \mathrm{mod}\ U$$

$\square$

Satz

Sei V ein Höchstgewichtsmodul mit höchstem Gewicht Λ. Dann gilt

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ (\lambda+\delta)^2 = (\Lambda+\delta)^2}} c_\lambda \, \mathrm{ch}(M(\lambda))$$

mit $c_\lambda \in \mathbb{Z}$ und $c_\Lambda = 1$

Beweis

Sei v primitiver Vektor vom Gewicht λ in V. Dann ist $\lambda \leq \Lambda$.

Weiterhin gilt

$$(\lambda+\varsigma)^2 = (1+\varsigma)^2$$

weil einerseits

$$\Omega(v) = ((1+\varsigma)^2 - \varsigma^2)\,v$$

und andererseits

$$\Omega(v) = ((\lambda+\varsigma)^2 - \varsigma^2)\,v \mod U$$

Also

$$((1+\varsigma)^2 - (\lambda+\varsigma)^2)\,v \in U$$

Da $v \notin U$ ist folgt

$$(1+\varsigma)^2 = (\lambda+\varsigma)^2$$

Es ist

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_{\lambda \in H^*} \underbrace{[V : L(\lambda)]}_{\neq 0 \text{ für } \lambda \text{ prim}} \mathrm{ch}(L(\lambda))$$

$$= \sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ (\lambda+\rho)^2 = (\Lambda+\rho)^2}} [V : L(\lambda)] \mathrm{ch}(L(\lambda))$$

Wegen $[V : L(\lambda)] \in \mathbb{Z}$ und $[V : L(\Lambda)] = 1$ reicht es also die Beh für $V = L(\lambda)$ zu beweisen

Es ist

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = \sum_{\substack{\mu \leq \lambda \\ (\mu+\rho)^2 = (\lambda+\rho)^2}} c_\mu \, \mathrm{ch}(L(\mu))$$

mit $c_\mu \in \mathbb{Z}$ und $c_\lambda = 1$. Sei

$$B(\lambda) = \{ \mu \leq \lambda \mid (\mu+\delta)^2 = (\lambda+\delta)^2 \}$$
$$= \{ \mu_1, \mu_2, \dots \}$$

Die Elemente lassen sich so anordnen, daß

$$\mu_i \leq \mu_j \text{ impliziert } i \geq j$$

Dann ist

$$\mathrm{ch}\,(M(\mu_i)) = \sum_{\substack{\mu \leq \mu_i \\ (\mu+\delta)^2 = \underbrace{(\mu_i+\delta)^2}_{= (\lambda+\delta)^2}}} c_\mu \, \mathrm{ch}\,(L(\mu))$$

$$= \sum_{\mu_j \in B(\lambda)} c_{ij} \, \mathrm{ch}\,(L(\mu_j))$$

Die Matrix c_{ij} ist ganzzahlig und der Form

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist i.a. nicht endlich. Invertieren des Systems liefert die Beh.

(Die inv Matrix hat auch die Form $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$)

□

10.4 Dominante Gewichte

Sei $G(A)$ eine Kac-Moody Alg.

(A nicht notw symmetrisierbar)

Def

$$P = \{ \lambda \in H^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \quad \forall_i \}$$

$$P_+ = \{ \lambda \in P \mid \lambda(h_i) \geq 0 \quad \forall_i \}$$

$$P_{++} = \{ \lambda \in P \mid \lambda(h_i) > 0 \quad \forall_i \}$$

Die Elemente in P heißen <u>ganzzahlige Gewichte</u>, in P_+ <u>dominante ganzzahlige Gewichte</u> und in P_{++} <u>reguläre dom ganzz Gew</u>.

<u>Satz</u>

Der $G(A)$-Modul $L(\Lambda)$ ist integrabel genau dann wenn $\Lambda \in P_+$

Die Weyl Gruppe W von $G(A)$ operiert auf den formalen Ausdrücken e^λ durch $w(e^\lambda) = e^{w(\lambda)}$

Es ist $w(e^\lambda e^\mu) = w(e^\lambda)\, w(e^\mu)$.

Satz

Für $\Lambda \in P_+$ ist $\mathrm{ch}(L(\Lambda))$ inv unter W

Bew

Dies liegt daran, daß die Mult integrabler Moduln inv unter W sind (vgl. 6.2)

$\square$

Sei

$$R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$$

<u>Satz</u>

Der Ausdruck

$$e^{\rho} R$$

ist antisymmetrisch unter W.

<u>Bew</u>

Es reicht z.z.

$$w_i (e^{\rho} R) = \det(w_i)\, e^{\rho} R$$

Es gilt

1) $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ ist inv unter w_i

2) $w_i(\rho) = \rho - \rho(h_i)\alpha_i = \rho - \alpha_i$

3) $\operatorname{mult}(\alpha_i) = 1$

4) $\operatorname{mult}(w_i(\alpha)) = \operatorname{mult}(\alpha)$

Damit

$$w_i(e^\rho R)$$

$$= w_i\Big(e^\rho (1-e^{-\alpha_i}) \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}} (1-e^{-\alpha})^{\operatorname{mult}(\alpha)}\Big)$$

$$= e^{w_i(\rho)} \big(1-e^{-w_i(\alpha_i)}\big) \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}} (1-e^{-\alpha})^{\operatorname{mult}(\alpha)}$$

$$= e^{\rho-\alpha_i} (1-e^{\alpha_i}) \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}} (1-e^{-\alpha})^{\operatorname{mult}(\alpha)}$$

$$= -e^\rho (1-e^{-\alpha_i}) \prod_{\alpha\in\Delta_+\setminus\{\alpha_i\}} (1-e^{-\alpha})^{\operatorname{mult}(\alpha)}$$

$$= \det(w_i)\, e^\rho R$$

$\square$

Von jetzt an sei $G(A)$ eine symmetrisierbare Kac-Moody Alg. und $(\,,\,)$ eine Standardform auf $G(A)$

Satz

Seien $\Lambda, \lambda \in P$ mit $\lambda \leq \Lambda$ und $\Lambda + \lambda \in P_+$. Dann ist entweder

$$(\Lambda+\lambda)(h_i) = 0 \quad \text{für alle } i \in \operatorname{supp}(\Lambda-\lambda)$$

oder

$$\Lambda^2 - \lambda^2 > 0$$

Insbesondere wenn $\Lambda \in P_{++}$, $\lambda \in P_+$ und $\lambda < \Lambda$, dann $\Lambda^2 - \lambda^2 > 0$.

Bew

$\lambda \leq \Lambda$ impliziert $\Lambda - \lambda = \beta = \sum k_i \alpha_i$

mit $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$. Es folgt

$$\Lambda^2 - \lambda^2 = (\Lambda + \lambda, \beta)$$

$$= \sum k_i (\Lambda + \lambda, \alpha_i)$$

$$= \sum k_i (\Lambda + \lambda)(\nu^{-1}(\alpha_i))$$

$$= \sum k_i \frac{\alpha_i^2}{2} \underbrace{(\Lambda + \lambda)}_{\in P_+}(h_i)$$

$$\geq 0$$

($k_i > 0$ genau dann wenn $i \in \operatorname{supp}(\Lambda - \lambda)$)

Also ist entweder $(\Lambda + \lambda)(h_i) = 0$ für alle $i \in \operatorname{supp}(\Lambda - \lambda)$ oder $\Lambda^2 - \lambda^2 > 0$.

$\square$

// 13.7.09

10.5 Die Charakterformel

Theorem

Sei $G(A)$ eine symmetrisierbare Kac-Moody Alg und $L(\Lambda)$ ein irred. Höchstgewichtsmodul mit $\Lambda \in P_+$. Dann ist

$$\mathrm{ch}(L(\Lambda)) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\Lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}}$$

Bew

Es ist

$$\mathrm{ch}(L(\Lambda)) = \sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ (\lambda+\rho)^2 = (\Lambda+\rho)^2}} c_\lambda \, \mathrm{ch}(M(\lambda))$$

und

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = e^{\lambda} R^{-1}$$

so daß

$$\underbrace{e^{\rho} R}_{\substack{\text{antisym}\\ \text{unter } W}} \underbrace{\mathrm{ch}(L(\Lambda))}_{\text{sym unter } W} = \sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ (\lambda+\rho)^2 = (\Lambda+\rho)^2}} c_{\lambda} e^{\lambda+\rho} \qquad (*)$$

Wir ersetzen die Summe auf der rechten Seite durch eine Summe über W.

$\sum c_{\lambda} e^{\lambda+\rho}$ ist antisym unter W

Es folgt

$\underline{c_\lambda = \det(w)\, c_\mu \quad \text{wenn} \quad w(\lambda+\rho) = \mu+\rho} \quad (**)$

Wir zeigen:

$\underline{c_\lambda \neq 0 \text{ impliziert } \lambda+\rho = w(\Lambda+\rho)}$

$\underline{\text{für genau ein } w \in W.}$

Wähle λ mit $c_\lambda \neq 0$. Dann ist $c_\mu \neq 0$ für alle μ mit $w(\lambda+\rho) = \mu+\rho$. Aus $(*)$ folgt $\mu \leq \Lambda$. Also

$$w(\lambda+\rho) \leq \Lambda+\rho \qquad \forall_{w \in W}$$

Wähle $\mu \in \{ \underbrace{w(\lambda+\rho)-\rho}_{\leq \Lambda} \mid w \in W \}$

mit $ht(\Lambda-\mu)$ minimal. Dann ist

1) $(\mu+\rho)^2 = (\lambda+\rho)^2 = (\Lambda+\rho)^2$

2) $\mu+\rho \in P_+ \qquad (\mu \leq \Lambda,\ \Lambda \in P$

$\rightsquigarrow \mu+\rho \in P\ )$

(Angenommen $(\mu+\rho)(h_i) < 0$. Dann

$$\mu+\rho = w(\lambda+\rho)$$

$$\mu'+\rho = w_i(\mu+\rho)$$

$$= (\mu+\rho) - (\mu+\rho)(h_i)\,\alpha_i$$

so daß

$$\mu' = \mu - \underbrace{(\mu+\rho)(h_i)}_{<0}\,\alpha_i$$

und

$$ht(\Lambda-\mu') < ht(\Lambda-\mu)$$

)

Da $\rho(h_i) = \frac{1}{2}a_{ii} = 1$, folgt $\rho \in P_{++}$ und $\Lambda+\rho \in P_{++}$.

Wir wenden den letzten Satz auf $\Lambda+\rho \in P_{++}$ und $\mu+\rho \in P_+$ an.

Wir haben $\mu + \delta \leq \lambda + \delta$. Falls $\mu + \delta < \lambda + \delta$ dann $(\mu+\delta)^2 < (\lambda+\delta)^2$. Das ist unmöglich. Also

$$\mu + \delta = \lambda + \delta$$

d.h. $w(\alpha + \delta) = \lambda + \delta$ für ein $w \in W$ bzw

$$\alpha + \delta = w(\lambda + \delta)$$

für ein $w \in W$. Da $\lambda + \delta$ in $C^\vee$ ist, muß w eindeutig sein.

Ist andersherum $\alpha + \delta = w(\lambda+\delta)$ so ist wegen $(**)$ natürlich $c_\alpha \neq 0$.

Sei $\alpha + \delta = w(\lambda + \delta)$. Dann folgt aus (**)

$$c_\lambda = \det(w^{-1})\, c_\Lambda = \det(w)$$

Damit

$$\sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ (\lambda+\rho)^2 = (\Lambda+\rho)^2}} c_\lambda e^{\lambda+\rho} = \sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\Lambda+\rho)}$$

□

Für $\Lambda = 0$ erhält man die

Nenneridentität

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)} = \sum_{w \in W} \det(w)\, e^{w(\rho)-\rho}$$

10.6 Die Nenneridentität von $\hat{A}_1$

Sei $G = sl_2(\mathbb{C})$. Die Wurzeln von G sind $\Delta = \{\pm\alpha_1\}$ mit $\alpha_1^2 = 2$. Die Affinisierung von G ist

$$G(\hat{A}) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes G \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

wobei $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Sei

$$\hat{H} = H \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

und

$$\alpha_0 = -\alpha_1 + \delta$$

$$h_0 = -h_1 + c$$

Dann ist $(\hat{H}, \hat{\Pi}, \hat{\Pi}^\vee)$ mit $\hat{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ und $\hat{\Pi}^\vee = \{h_0, h_1\}$

eine Realisierung von $\hat{A}$.

Die Wurzeln von $G(\hat{A})$ sind gegeben durch

$$\hat{\Delta}^{re} = \{\alpha + n\delta \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Delta\}$$

$$\hat{\Delta}^{im} = \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{re}_{+} &= \{\alpha_1 + n(\alpha_0 + \alpha_1) \mid n \geq 0\} \\ &\quad \cup \{-\alpha_1 + n(\alpha_0+\alpha_1) \mid n \geq 1\} \\ &= \{(n-1)\alpha_0 + n\alpha_1 \mid n \geq 1\} \\ &\quad \cup \{n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 \mid n \geq 1\}\end{aligned}$$

$$\hat{\Delta}^{im}_{+} = \{n\alpha_0 + n\alpha_1 \mid n \geq 1\}$$

Die Multiplizitäten sind

$\alpha \in \hat{\Delta}^{re}$: $\quad \mathrm{mult}(\alpha) = 1$

$\alpha \in \hat{\Delta}^{im}$: $\quad \mathrm{mult}(\alpha) = \mathrm{rank}(G) = 1$

Die Weyl Gruppe von $G(\hat{A})$ ist eine Coxeter Gruppe mit Erzeugern w_0, w_1 und Relationen $w_0^2 = w_1^2 = 1$ (keine Bed auf $w_0 w_1$)

Die Elemente von W sind

$$1$$

$$\begin{array}{cc} w_0 & w_1 \\ w_0 w_1 & w_1 w_0 \\ w_0 w_1 w_0 & w_1 w_0 w_1 \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Es ist

$$w_0(\varrho) = \varrho - \varrho(h_0)\,\alpha_0 = \varrho - \alpha_0$$

$$\underline{w_0(\varrho) - \varrho = -\alpha_0}$$

$$\underline{w_1(\varrho) - \varrho = -\alpha_1}$$

$$w_1 w_0(\varrho) = w_1(\varrho - \alpha_0) = w_1(\varrho) - w_1(\alpha_0)$$

$$= \varrho - \alpha_1 - (\alpha_0 - \alpha_0(h_1)\,\alpha_1)$$

$$= \varrho - \alpha_1 - (\alpha_0 + 2\alpha_1)$$

$$= \varrho - \alpha_0 - 3\alpha_1$$

$$\underline{w_1 w_0(\varrho) - \varrho = -\alpha_0 - 3\alpha_1}$$

$$\underline{w_0 w_1(\varrho) - \varrho = -3\alpha_0 - \alpha_1}$$

Die Ausdrücke $w(\varrho) - \varrho$ in obiger Ordnung

$$0$$

$$-\alpha_0 \qquad\qquad -\alpha_1$$

$$-3\alpha_0-\alpha_1 \qquad\qquad -\alpha_0-3\alpha_1$$

Allgemein

$$w_0 w_1 \dots (\varrho)-\varrho = -\frac{n(n+1)}{2}\alpha_0 - \frac{n(n-1)}{2}\alpha_1$$

$$\underbrace{w_1 w_0 \dots}_{n \text{ Faktoren}} (\varrho)-\varrho = -\frac{n(n-1)}{2}\alpha_0 - \frac{n(n+1)}{2}\alpha_1$$

Einsetzen in die Nennerid

$$\prod_{\alpha\in\hat{\Delta}_+}(1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}$$

$$= \sum_{w\in W} \det(w)\, e^{w(\varrho)-\varrho}$$

liefert

$$\prod_{n\geq 1} \left(1-e^{-(n-1)\alpha_0}e^{-n\alpha_1}\right)$$

$$\left(1-e^{-n\alpha_0}e^{-(n-1)\alpha_1}\right)$$

$$\left(1-e^{-n\alpha_0}e^{-n\alpha_1}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-\frac{n(n+1)}{2}\alpha_0} e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha_1}$$

$$+ \sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-\frac{n(n-1)}{2}\alpha_0} e^{-\frac{n(n+1)}{2}\alpha_1}$$

$$+ 1$$

Setze $\underline{e^{-\alpha_0} = z^{-1}q}$ und $\underline{e^{-\alpha_1} = zq}$

Dann erhalten wir

$$\prod_{n\geq 1}(1-zq^{2n-1})(1-z^{-1}q^{2n-1})(1-q^{2n})$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n z^n q^{n^2}$$

Dies ist Jacobis Tripelproduktid.

10.7 Weitere Resultate

Mit Hilfe des Casimir Op kann man folgendes Resultat beweisen

Theorem

Sei A eine symmetrisierbare Cartan Matrix und $G(A) = \tilde{G}(A)/J$

die zugehörige Kac-Moody Alg

Dann erzeugen die Elemente

$$\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}} e_j \qquad (i \neq j)$$

$$\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j \qquad (i \neq j)$$

die Ideale J_+ und J_-.

Es folgt

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine symmetrisier-bare verallgem Cartan Matrix und $(H, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A. Dann ist $G(A)$ die Lie

$\mathfrak{L}\mathfrak{g}$ mit Erzeugenden e_i, f_i und

$h \in H$ und Relationen

$$[h, h'] = 0$$

$$[e_i f_j] = \delta_{ij} h_i$$

$$[h, e_j] = \alpha_j(h) e_j \qquad [h, f_j] = -\alpha_j(h) f_j$$

$$\operatorname{ad}(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$$

$$\operatorname{ad}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0$$

// 15.7.09