Kac-Moody Algebren

1. Einleitung

Sei G eine endlich dim einf. Lie Alg über $\mathbb{C}$ mit Cartan Unteralg H und Killing Form

$$(x,y) = tr(ad(x)\,ad(y))$$

Dann ist

$$G = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} G_\alpha$$

mit

$$G_\alpha = \{ x\in G \mid [h,x] = \alpha(h)x \quad \forall_{h\in H} \}$$

Wähle einfache Wurzeln

$\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, $\ell = \dim H$. Dann läßt sich jedes $\alpha \in \Phi$ schreiben als

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} K_i \alpha_i$$

mit ganzzahligen Koeff K_i , die entweder alle ≥ 0 oder alle ≤ 0 sind.

Die Killing Form ist nicht ausg auf G und auf H. Die Abb

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H^* \\ h &\longmapsto (h, \ ) \end{aligned}$$

ist ein kan Isom.

Die Zahlen

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_j \alpha_i)}{\alpha_i^2}$$

sind in $\mathbb{Z}$. Die Matrix

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{e}$$

heißt <u>Cartan Matrix</u> von G

Sie ist bis auf Umordnung der Indices <u>unabh.</u> von der Wahl von H und von der Wahl der einf. Wurzeln.

A hat die folgenden Eigenschaften

1) $a_{ii} = 2$

2) $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$

3) $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$

und

$$\det(A_S) > 0$$

$(S \subset \{1, \dots, \ell\}, \ A_S = (a_{ij})_{i,j \in S})$

Sei h_i das Urbild von $2\alpha_i / \alpha_i^2$ unter dem Kan Isom $H \longrightarrow H^*$.

Dann ist $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$.

Wähle $e_i \in G_{\alpha_i}$, $f_i \in G_{-\alpha_i}$ so daß $[e_i, f_i] = h_i$

Dann erzeugen die Elemente

e_i, h_i, f_i, $i = 1, \dots, l$ die Lie Alg

G und

1) $[h_i h_j] = 0$

2) $[e_i f_j] = \delta_{ij} h_i$

3) $[h_i e_j] = a_{ij} e_j$

$[h_i f_j] = -a_{ij} f_j$

4) $ad(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$

$ad(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0$ für $i \neq j$

Andererseits ist die Lie Alg mit Erzeugenden e_i, h_i, f_i und Rel 1) - 4) isom zu G.

<u>Bsp</u>

Sei $G = sl_{n+1}(\mathbb{C})$ und H die abelsche Unteralg der Diagonalmatrizen.

Sei

$$e_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ - & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Dann ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_{n+1} \end{pmatrix} \in H$

$$[x, e_{ij}] = (x_i - x_j) e_{ij}$$

Damit zeigt man, daß H eine Cartan Unteralg von G ist.

Es gilt

$$G = H \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} e_{ij}$$

Die Abb

$$\alpha_{ij} : H \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto x_i - x_j$$

sind die Wurzeln von G bzgl H.

Die Killing Form von G ist bis auf einen pos. Faktor durch die Spur des Matrixproduktes gegeben. Der Faktor ist unerheblich für die Cartan Matrix. Für $x, y \in G$ def

$$(x, y) = tr(xy)$$

Insbesondere für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_{n+1} \end{pmatrix} \in H$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_{n+1} \end{pmatrix} \in H$$

ist

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$$

Dann hat α_{ij} Norm $\alpha_{ij}^2 = 2$.

Def

$$\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} & \text{falls } i < j \\ -(\alpha_j + \ldots + \alpha_{i-1}) & \text{falls } i > j \end{cases}$$

Somit sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ einfache Wurzeln.

Die Cartan Matrix ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

In der Kac-Moody Theorie erlaubt man allgemeinere Cartan Matrizen.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine ganzzahlige Matrix mit

1) $a_{ii} = 2$

2) $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$

3) $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$

Wie oben können wir A eine Lie Alg $G'(A)$ zuordnen.

$G'(A)$ ist die Lie Alg mit Erz e_i, h_i, f_i, $i = 1, \dots, n$ und Rel

1) $[h_i\, h_j] = 0$

2) $[e_i\, f_j] = \delta_{ij} h_i$

3) $[h_i\, e_j] = a_{ij} e_j$

$[h_i\, f_j] = -a_{ij} f_j$

4) $\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$

$\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \qquad i \neq j$

$G'(A)$ heißt die Kac-Moody

Alg zu A.
(Wir geben später eine etwas andere Def die unter einer Symmetrisierbarkeitsbed in obige Def übergeht.)

Wir untersuchen nun Lie Alg dieses Typs.
Mit Hilfe der Darstellungsth dieser Lie Alg lassen sich klassische Identitäten beweisen. Beispielsweise ist die Nenneriden der Affinisierung von $sl_2(\mathbb{C})$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n-1}z^{-1})$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n z^n q^{n^2}$$

Dies ist Jacobis Tripel Produktid

<u>Literatur</u>

Kac, Infinite dimensional Lie alg

Carter, Lie algebras of finite and affine type