6. $\mathbb{R}$ ist

- Körper
- angeordnet
- archimedisch

  $\forall x \in \mathbb{R}.\ (\forall n \in \mathbb{N}.\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \Rightarrow x = 0$

- vollständig

  für jede Intervallschachtelung

  $\forall k \exists n \in \mathbb{N}$
  $b_n - a_n \leq \frac{1}{k}$

  $a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq b_{n+1} \leq b_n$
  $(n \in \mathbb{N})$

  gibt es (genau) ein $r \in \mathbb{R}$
  mit $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_n \leq r \leq b_n$

$\mathbb{R}$ ist dadurch "bis auf Isomorphie" eindeutig bestimmt

Existenz von $\mathbb{R}$:
- Skalarenbereich der Elementargeometrie
- Konstruktion aus $\mathbb{Q}$

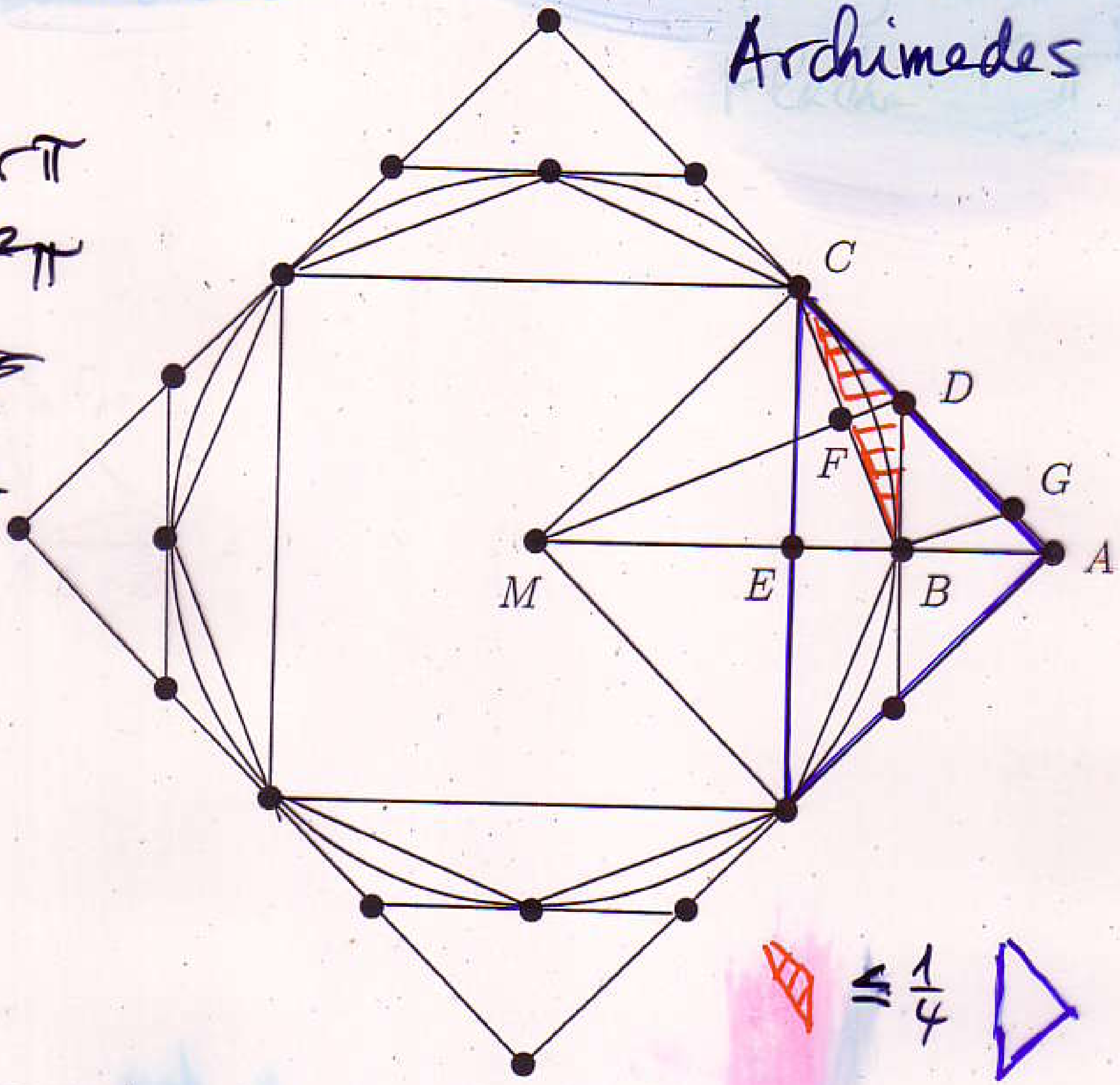
Quadratur des Kreises

nach Archimedes

$2r\pi$

$r^2\pi$

$\frac{r}{2}$



$\leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2}|BC|\cdot r = \Delta MBC \leq \triangleleft MBC$$
$$\leq \Delta MBD + \Delta MCD$$
$$= \frac{1}{2}(|BD| + |DC|)\, r$$

Fläche $= r^2\pi$

7.6 Definition. Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit

$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \in \underline{\mathbb{R}}$$

so, dass

- $\langle \vec{x} | \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$
- $\langle \vec{x} | s\vec{y} \rangle = s \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ $\quad s \in \mathbb{R}$
- $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$
- $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle > 0$

Man sagt auch: V ist Vektorraum mit **Skalarprodukt** $\langle . | . \rangle$

Definiere $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ Länge, Betrag von $\vec{x}$, Norm

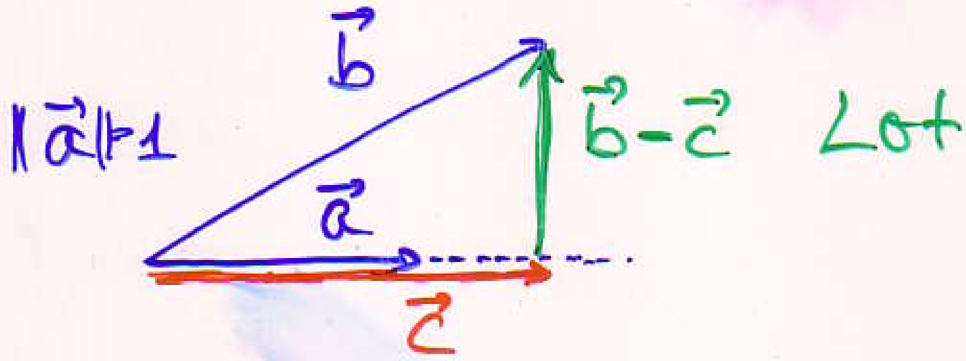
$\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$

$\vec{x}$ senkrecht, orthogonal $\vec{y}$

Für $\|\vec{a}\| = 1$ ist

$$\vec{c} = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \vec{a}$$

Komponente von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$



• $\vec{b} - \vec{c} \perp \vec{a}$

Bew. $\langle \vec{a} | \vec{b} - \vec{c} \rangle$

$\vec{c} = r\vec{a}$

$= \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle$ $\quad r = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$

$= \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \underbrace{\langle \vec{a} | \vec{a} \rangle}_{=1}$

$= 0$

Für alle $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \right\| = 1$ Normierung

7.2 Skalarprodukt in der Elementargeometrie

Voraussetzung: Längenmessung

Definition für $\|\vec{a}\| = 1$

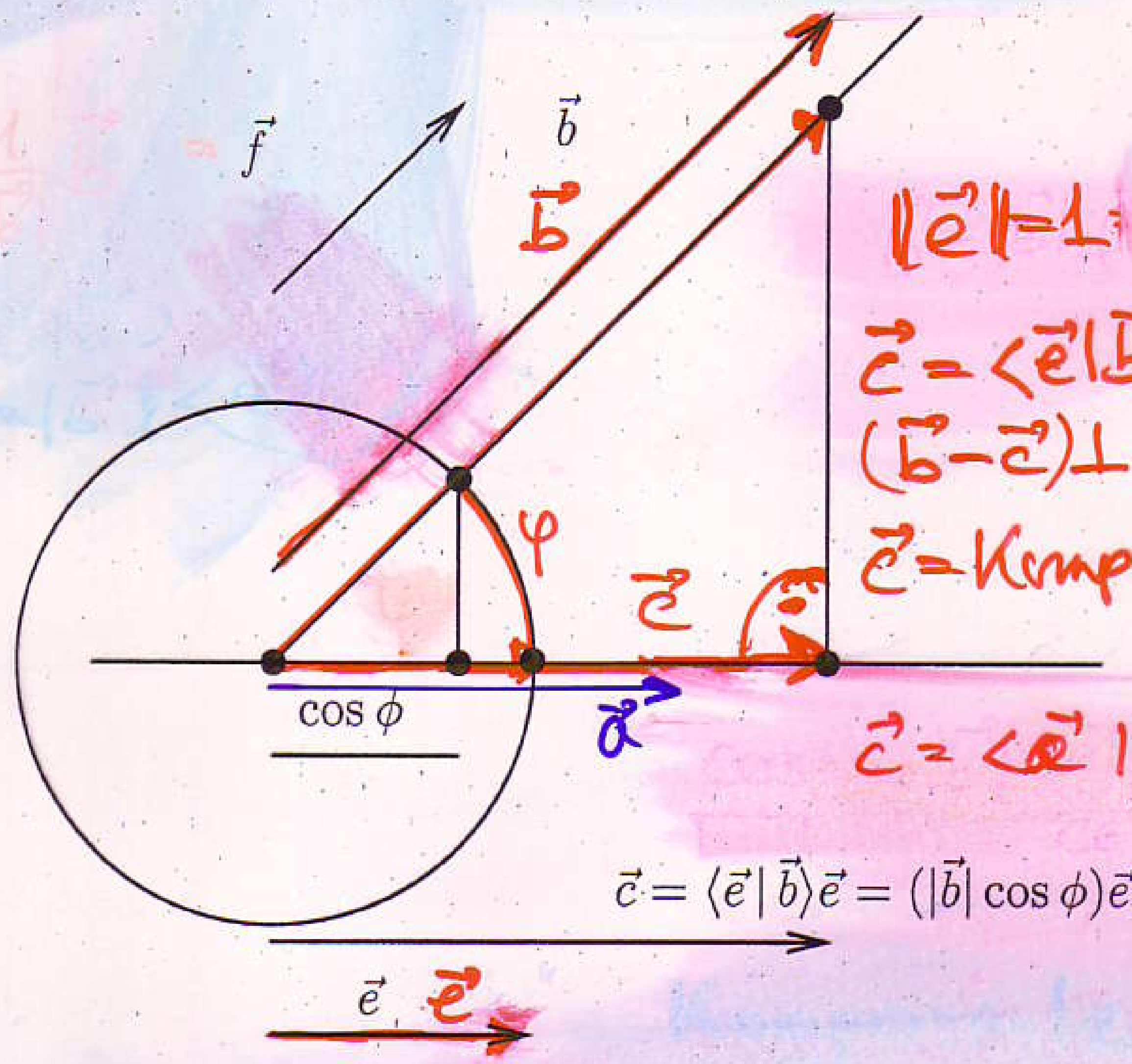
$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle := r \iff \vec{b} - r\vec{a} \perp \vec{a}$$

allgemein

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle := \|\vec{a}\| \left\langle \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \,\middle|\, \vec{b} \right\rangle$$

- Der Raum der Vektoren wird dadurch euklidischer Vektorraum

Beweis: Reduktion auf Fall $\|\vec{a}\| = 1$ bzw. $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}| = 1$.
Dann elementargeometrisch (Kongruenzsätze)



$\|\vec e\| = 1$

$\vec c = \langle \vec e | \vec b \rangle \vec e$

$(\vec b - \vec c) \perp \vec e$

$\vec c$ = Komponente

$\vec c = \langle \vec a | \vec b \rangle \vec e$

$\vec a = \|\vec a\| \vec e$

$\vec b = \|\vec b\| \vec f$

$\langle \vec a | \vec b \rangle = \|\vec a\| \langle \vec e | \vec b \rangle$

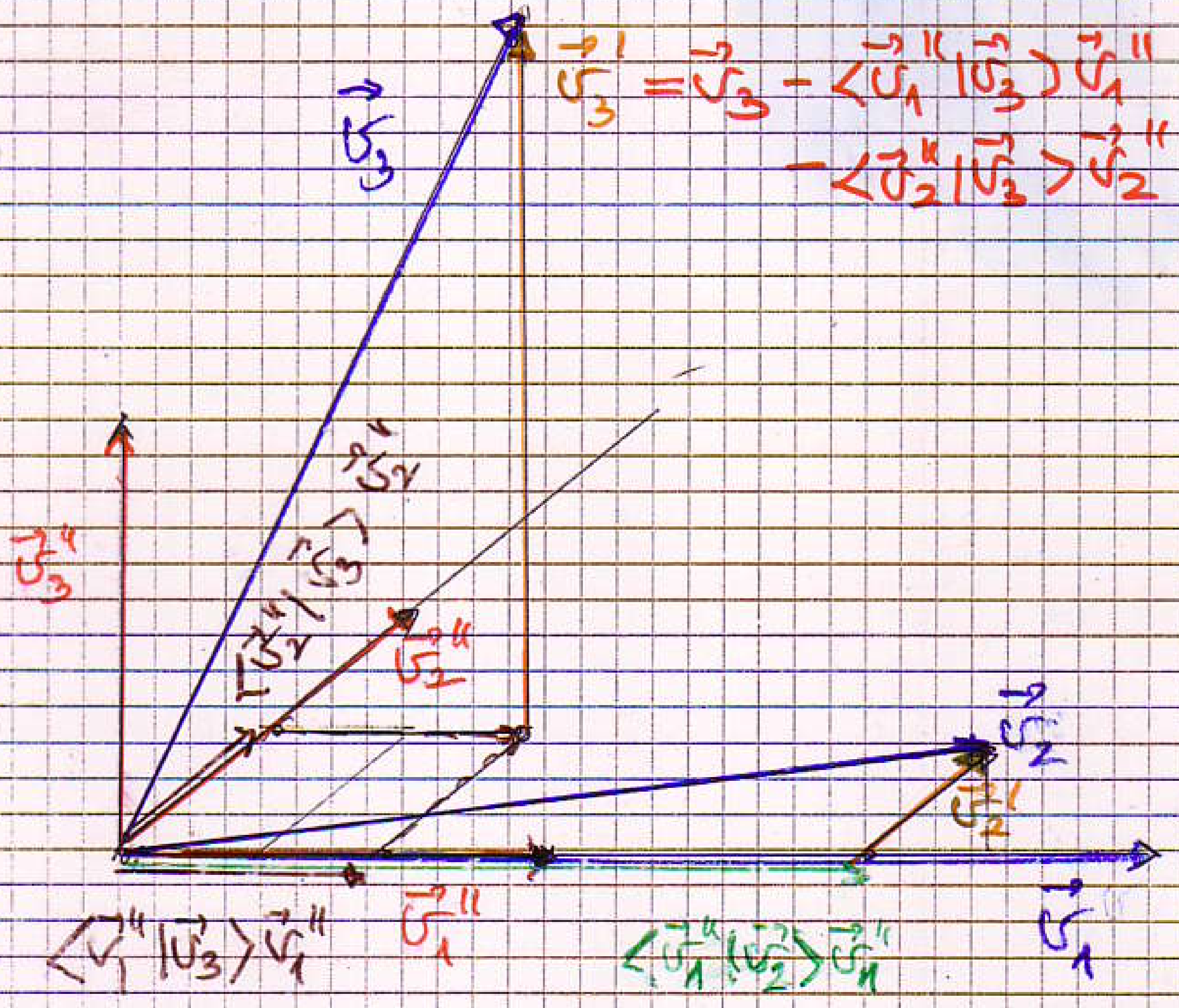
$= \|\vec a\| \cdot \|\vec b\| \langle \vec e | \vec f \rangle = \|\vec a\| \cdot \|\vec b\| \cos\varphi$

$\cos\varphi := \langle \vec e | \vec f \rangle$ dubiose Schreibweise

7.4

$$\langle \vec{v}_1'' | \vec{v}_3' \rangle = \langle \vec{v}_1'' | \vec{v}_3 \rangle - \langle \vec{v}_1'' | \vec{v}_3 \rangle \underbrace{\langle \vec{v}_1'', \vec{v}_1'' \rangle}_{=1} - \langle \vec{v}_2'' | \vec{v}_3 \rangle \underbrace{\langle \vec{v}_1'', \vec{v}_2'' \rangle}_{=0}$$

$$= 0$$



$$\vec{x} = r_1 \vec{v}_1'' + r_2 \vec{v}_2'' \Rightarrow$$

$$\langle \vec{x} | \vec{v}_3'' \rangle = r_1 \langle \vec{v}_1'', \vec{v}_3'' \rangle + r_2 \langle \vec{v}_2'' | \vec{v}_3'' \rangle = 0$$

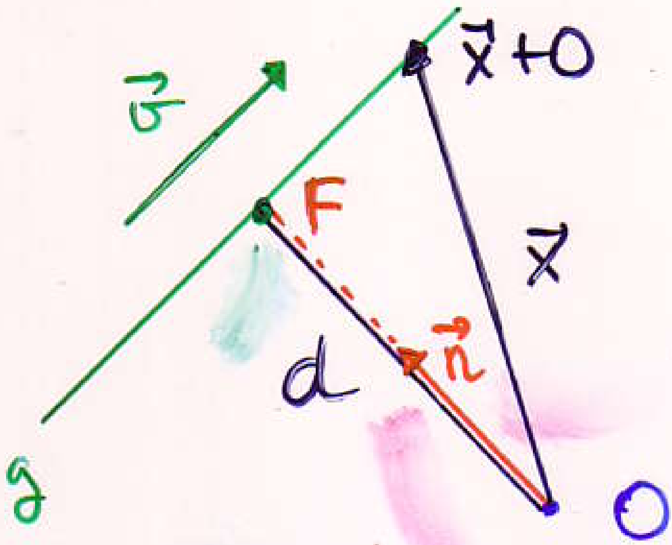
7.5 Normalenvektoren

In der Ebene gegeben

O Ursprung

$\|\vec{n}\| = 1$, $d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$

$g = \{\vec{x} + O \mid \langle \vec{n} \mid \vec{x} \rangle = d\}$



- Gerade mit Parameterdarst

$g = \{r\vec{v} + F \mid r \in \mathbb{R}\}$

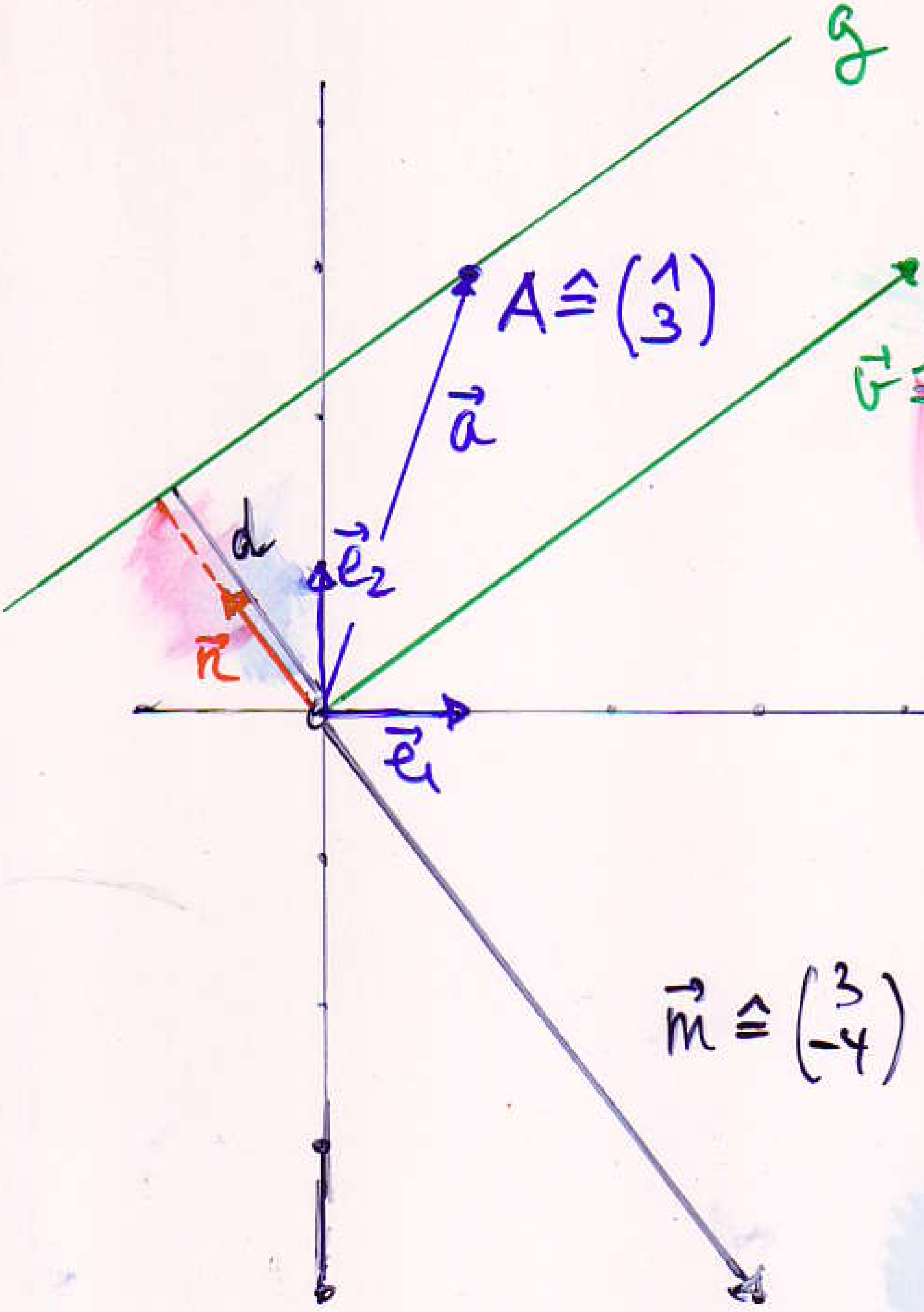
$\vec{v} \perp \vec{n}$

d = Abstand O vom g

Hesse Normalenform

allgemein $\vec{m} \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$

$$\vec{n} := \begin{cases} \frac{1}{|\vec{m}|}\vec{m} \\ \frac{-1}{|\vec{m}|}\vec{m} \end{cases} \quad d = \begin{cases} c/|\vec{m}| & \text{falls } c \geq 0 \\ -c/|\vec{m}| & \text{falls } c < 0 \end{cases}$$



$$c = \langle \vec{m} | \vec{a} \rangle$$
$$= 3 - 12 = -9$$

$$\|\vec{m}\| = 5$$

$$\cancel{\|}\vec{n}\cancel{\|} \triangleq \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad d = \frac{9}{5}$$

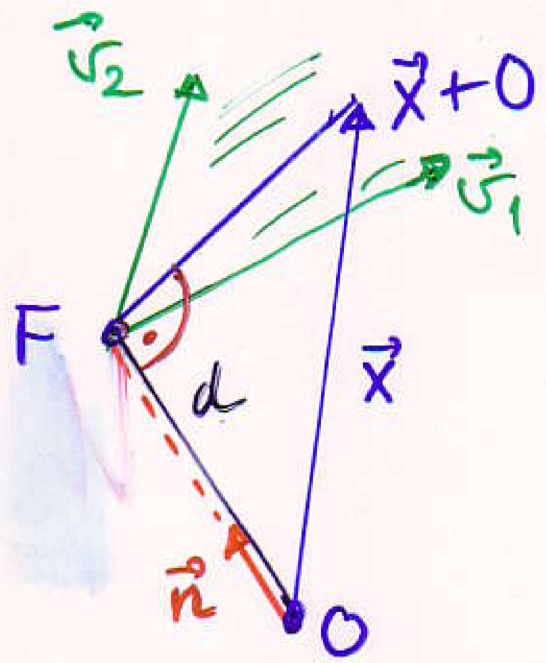
$$g = \left\{ \vec{x} \in O \;\middle|\; -\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 = \frac{9}{5} \right\}$$

Normalenform im Raum

Ebene $\varepsilon = \{\vec{x}+O \mid \langle \vec{n} \mid \vec{x} \rangle = d\}$

$|\vec{n}| = 1$

$d \geq 0$



$$\varepsilon = \{r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + A \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\vec{n} \mathrel{\hat{=}} \underline{n}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ Fundamentalsystem für

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

$\underline{a}$ spezielle Lösung

$\vec{v}_i \mathrel{\hat{=}} \underline{v}_i$, $A \mathrel{\hat{=}} \underline{a}$

Umgekehrt

$$\vec{a} \neq 0$$

$$\vec{v}_1 \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrel{\hat=} \vec{a}$$

löse $\quad -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$$3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\vec{m} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \langle \vec{m} \mid \vec{a} \rangle = -15$$

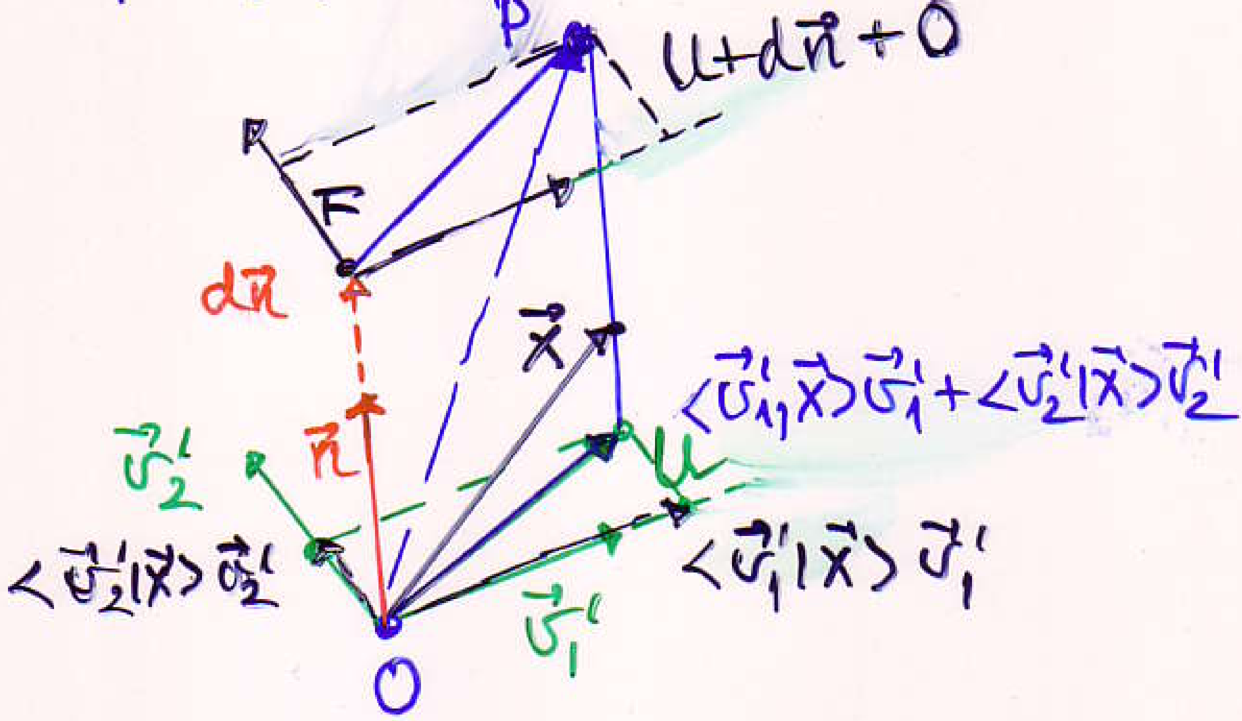
$$\|\vec{m}\| = 3$$

$$\vec{n} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad d = 5$$

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 5$$

Orthogonalprojektion

$$P = \langle \vec{v}_1' | \vec{x} \rangle \vec{v}_1' + \langle \vec{v}_2' | \vec{x} \rangle \vec{v}_2' + d\vec{n} + O$$



U mit Orthonormalbasis $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$

$\Rightarrow \langle \vec{v}_1' | \vec{x} \rangle \vec{v}_1' + \langle \vec{v}_2' | \vec{x} \rangle \vec{v}_2'$
Orthogonalprojektion von $\vec{x}$ in U

P Orthogonalprojektion von $\vec{x} + O$ in $U + d\vec{n} + O$

$$\vec{v}_1{}' \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_1{}' | \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_1{}'$$

$$\mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2{}' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

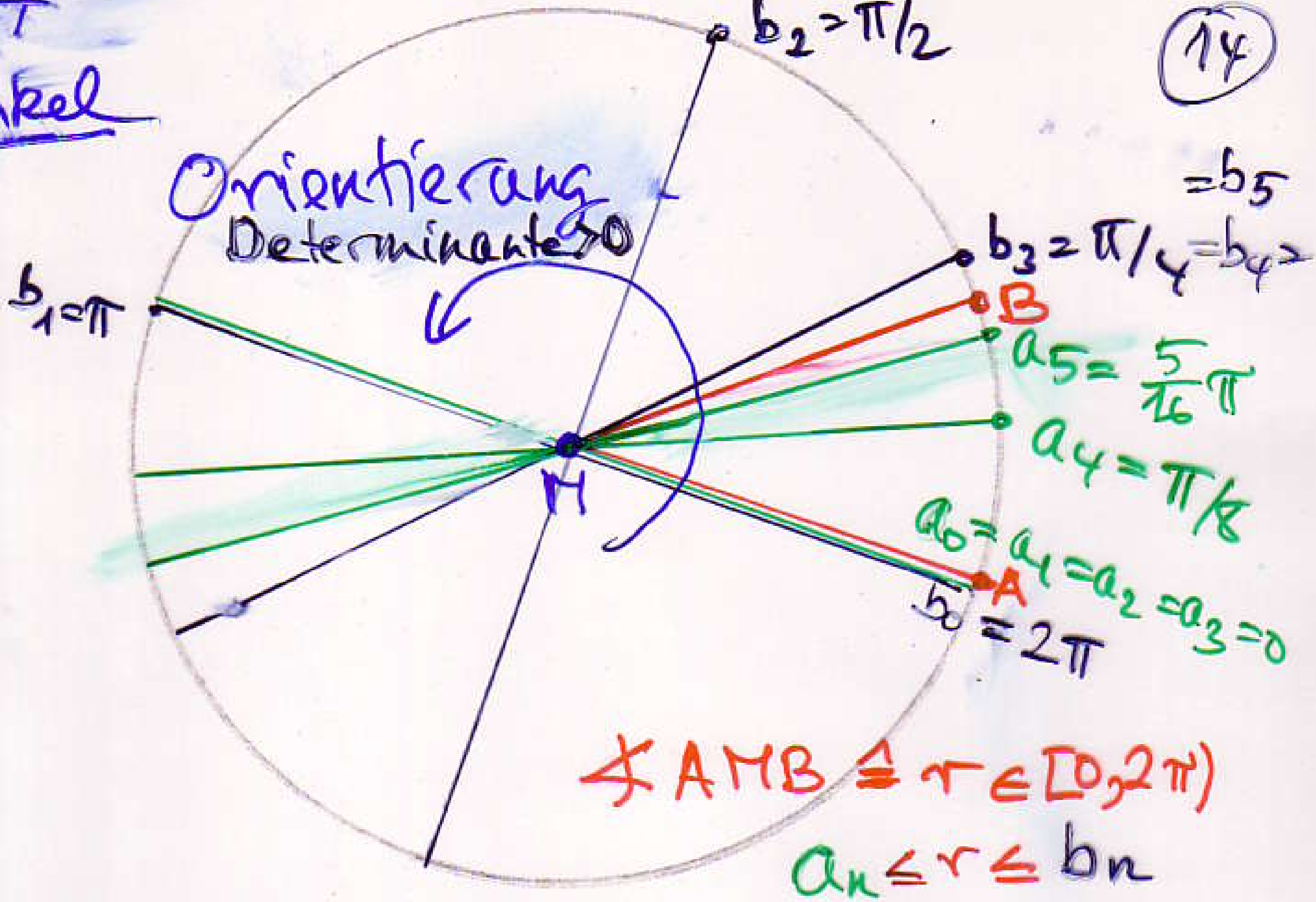
$$\vec{x} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{v}_1{}' | \vec{x} \rangle \vec{v}_1{}' + \langle \vec{v}_2{}' | \vec{x} \rangle \vec{v}_2{}'$$

$$\mathrel{\hat{=}} 2\vec{v}_1{}' + 3\vec{v}_2{}' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\8\\7\end{pmatrix}$$

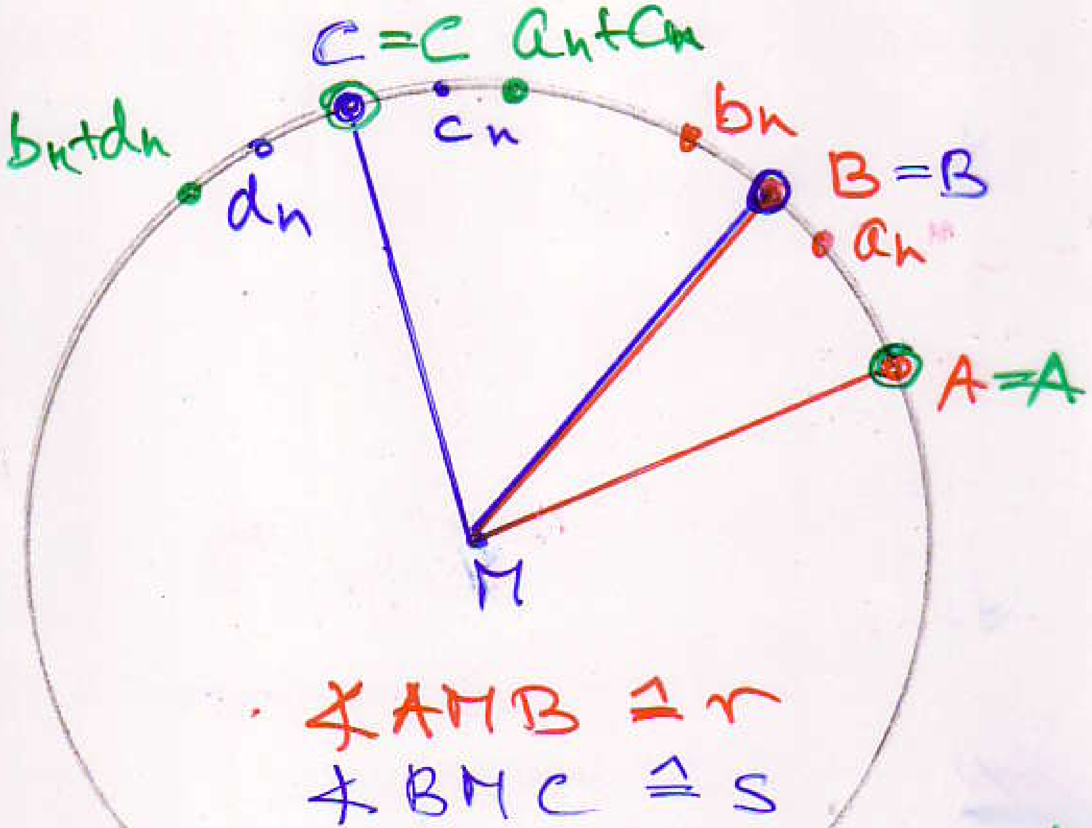
$$P \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\8\\7\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7\\18\\-3\end{pmatrix}$$

7.7 Winkel



$\sphericalangle AMB \mathrel{\hat=} r \in [0, 2\pi)$

$a_n \leq r \leq b_n$



$\sphericalangle AMB \mathrel{\hat=} r$

$\sphericalangle BMC \mathrel{\hat=} s$

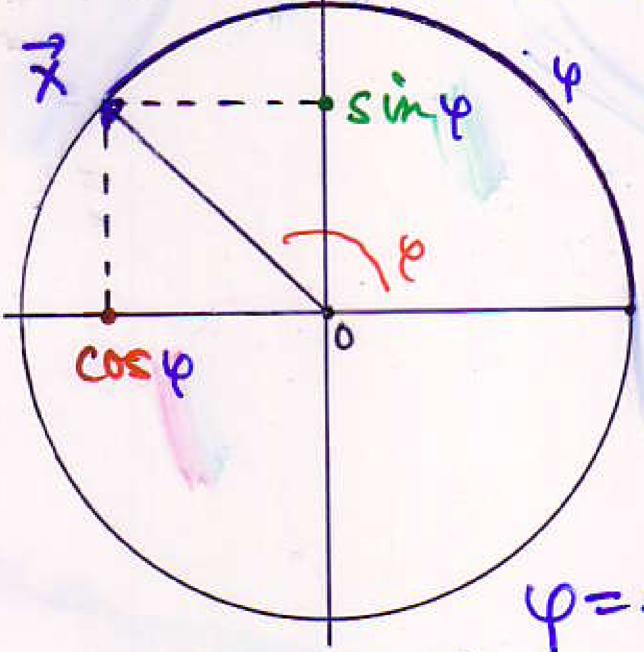
$\sphericalangle AMC \mathrel{\hat=} r + s \mod 2\pi$

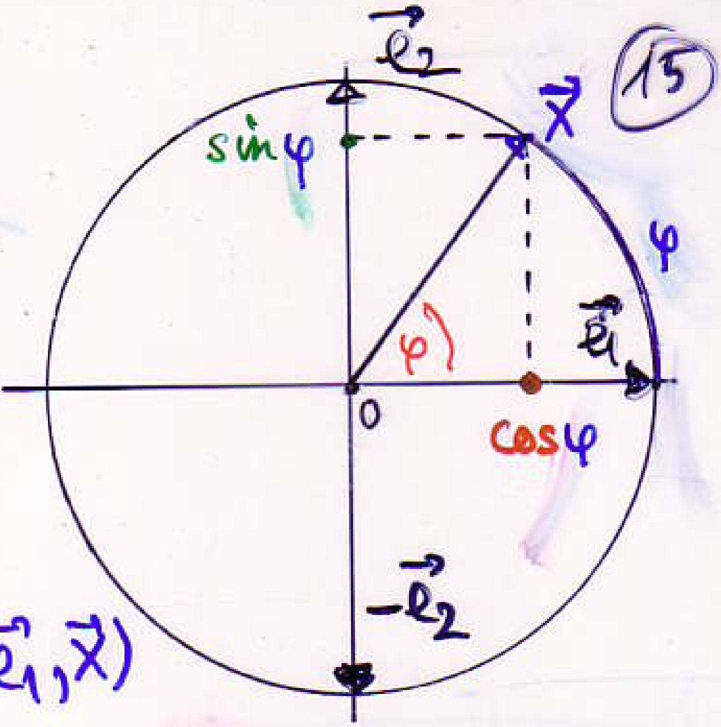
$= r + s - 2\pi$ falls $r + s \geq 2\pi$

a_n, b_n
c_n, d_n binär

$\Rightarrow a_n + c_n,\ b_n + d_n$ binär

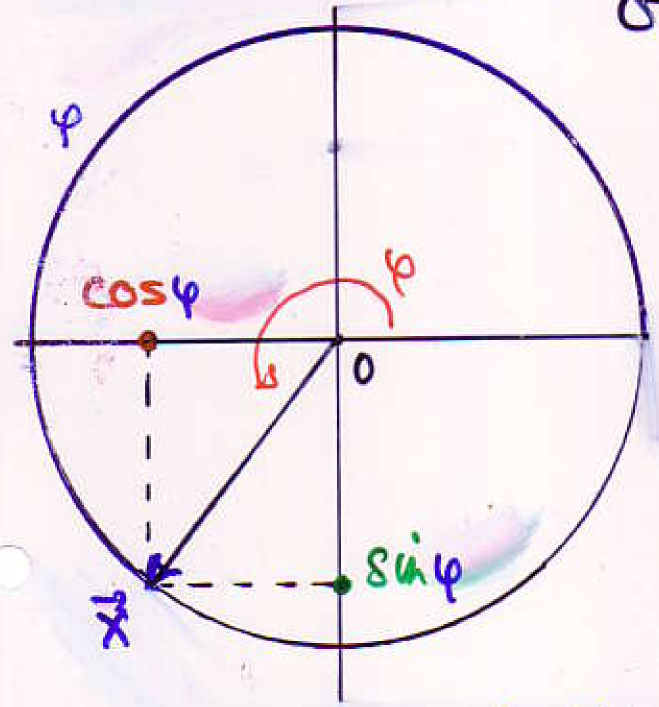
7.8 Sinus & Co

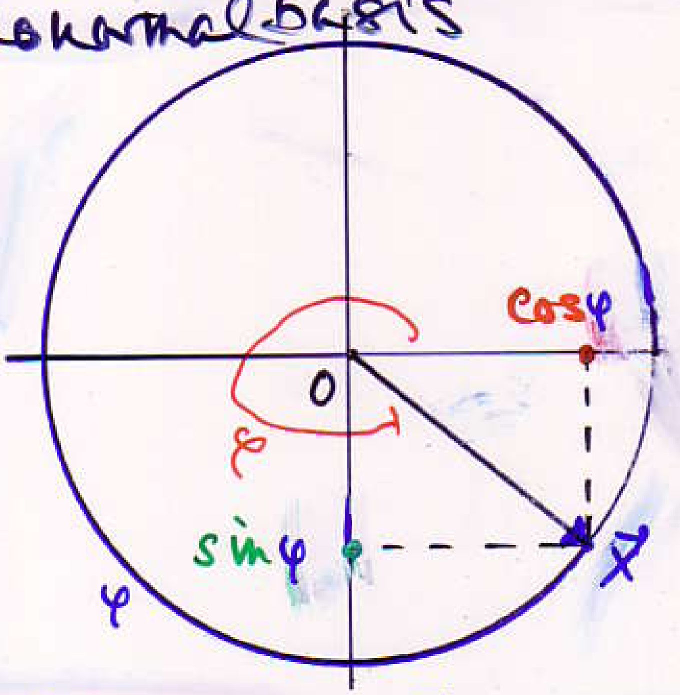




$\varphi = \sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{x})$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ positiv orientierte Orthonormalbasis





$\cos\varphi = \langle \vec{e}_1 | \vec{x} \rangle, \quad \sin\varphi = \langle \vec{e}_2 | \vec{x} \rangle$

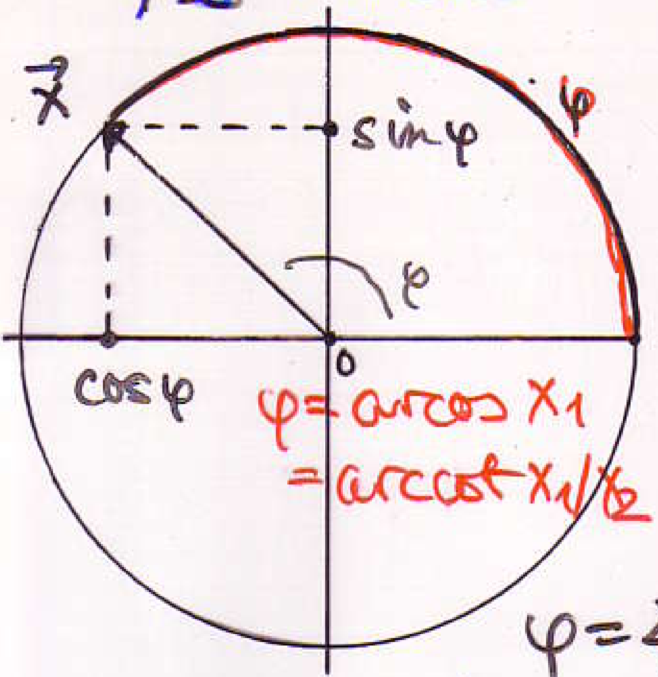
$= \cos(\varphi + 2z\pi) \qquad = \sin(\varphi + 2z\pi) \qquad z \in \mathbb{Z}$

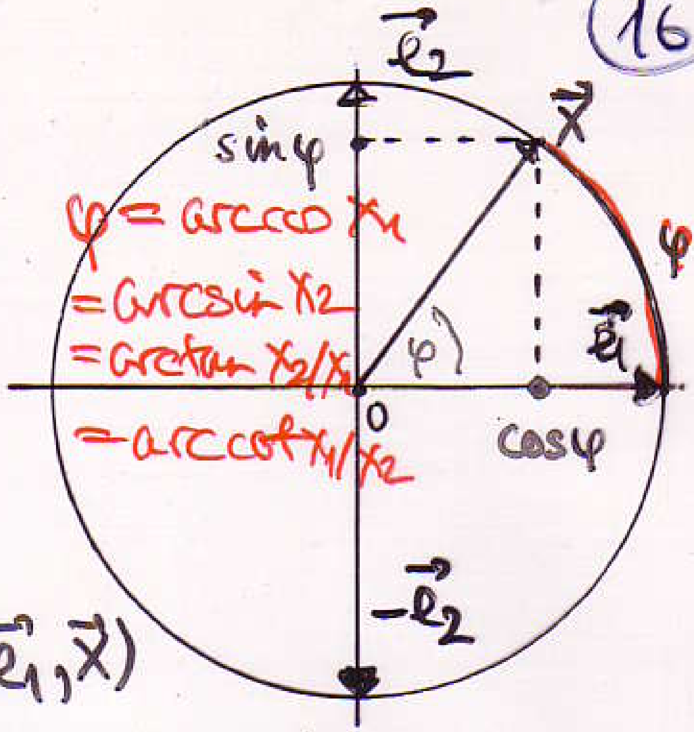
$\cos\varphi = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad \sin\varphi = -\cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$

$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi \neq 0} \qquad \cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi \neq 0}$

Tangens Cotangens

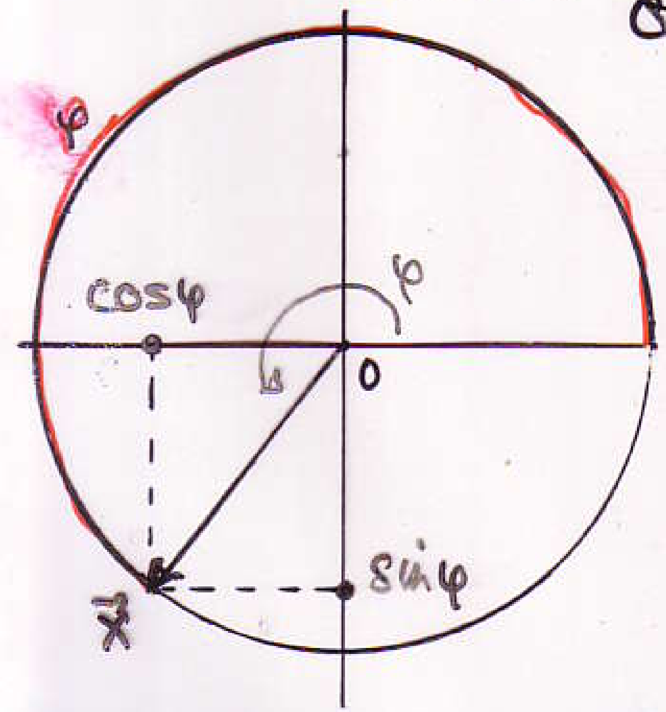
7.9 Arcus

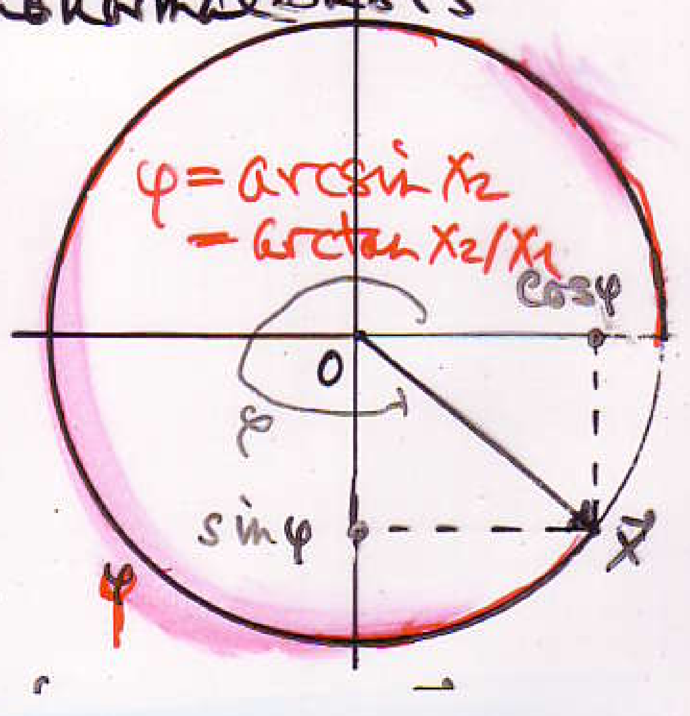




$\varphi = \sphericalangle(\vec{e}_1, \vec{x})$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ positiv orientierte orthonormal basis





$(\cos\varphi, \sin\varphi) = (x_1, x_2) \mapsto \vec{x} \mapsto \varphi \in [0, 2\pi)$

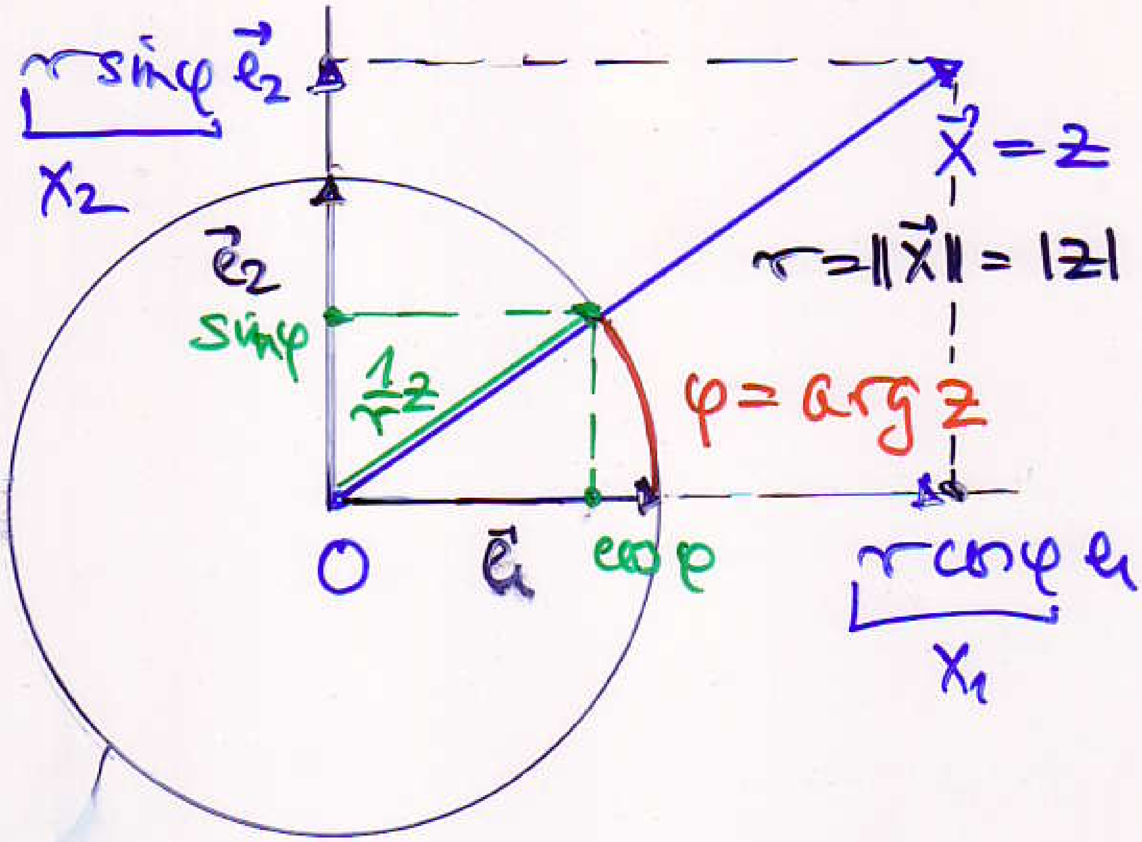
$x_1 \longmapsto \varphi = \arccos x_1 \in [0, \pi]$

$[-1,1] \ni x_2 \longmapsto \varphi = \arcsin x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$

$x_2/x_1 \longmapsto \varphi = \arctan x_2/x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\mathbb{R} \ni x_1/x_2 \longmapsto \varphi = \operatorname{arccot} x_1/x_2 \in (0, \pi)$

7.10 Polarkoordinaten in der Ebene



$$z = \vec{x} = r\left[(\cos\varphi)\vec{e}_1 + (\sin\varphi)\vec{e}_2\right]$$

(r, φ) Polarkoordinaten

von $\vec{x} = z$

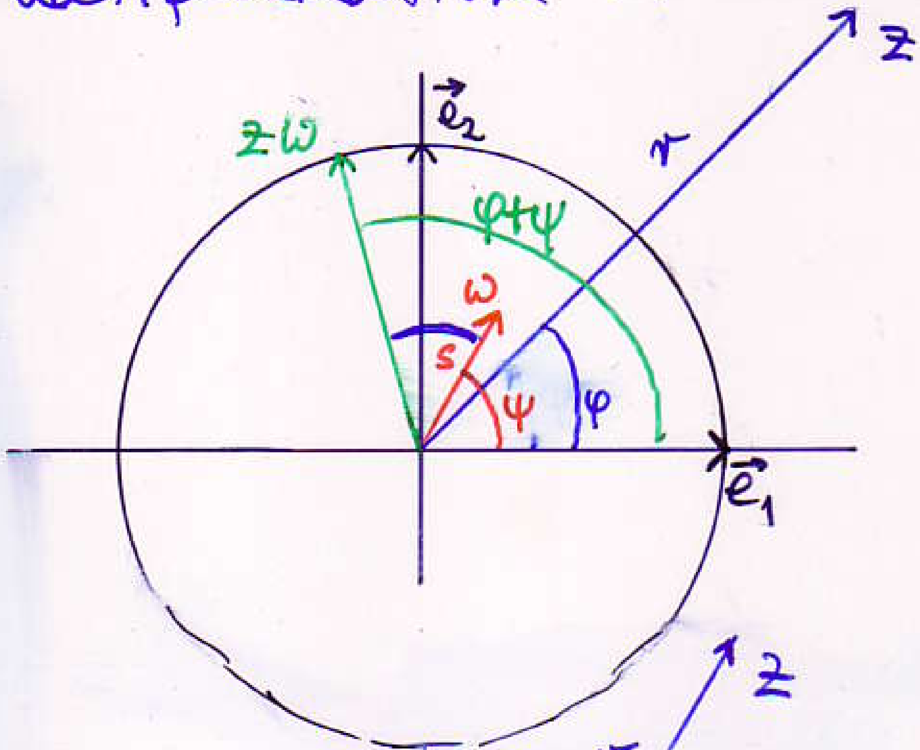
r Betrag

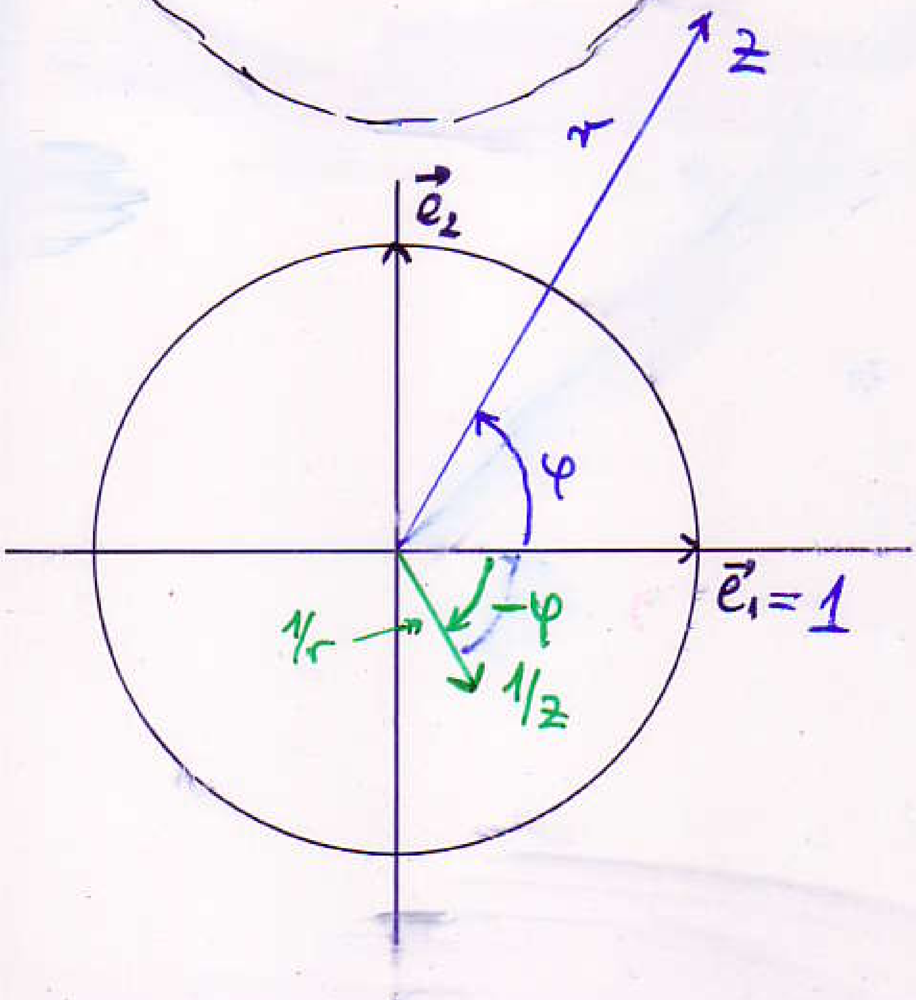
$\varphi = \arg z$ Argument

modulo 2π: $\varphi + 2z\pi$

$z \in \mathbb{Z}$

9.2 Multiplikation in der Ebene





$$\|zw\| = \|z\| \cdot \|w\|$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$

Def.

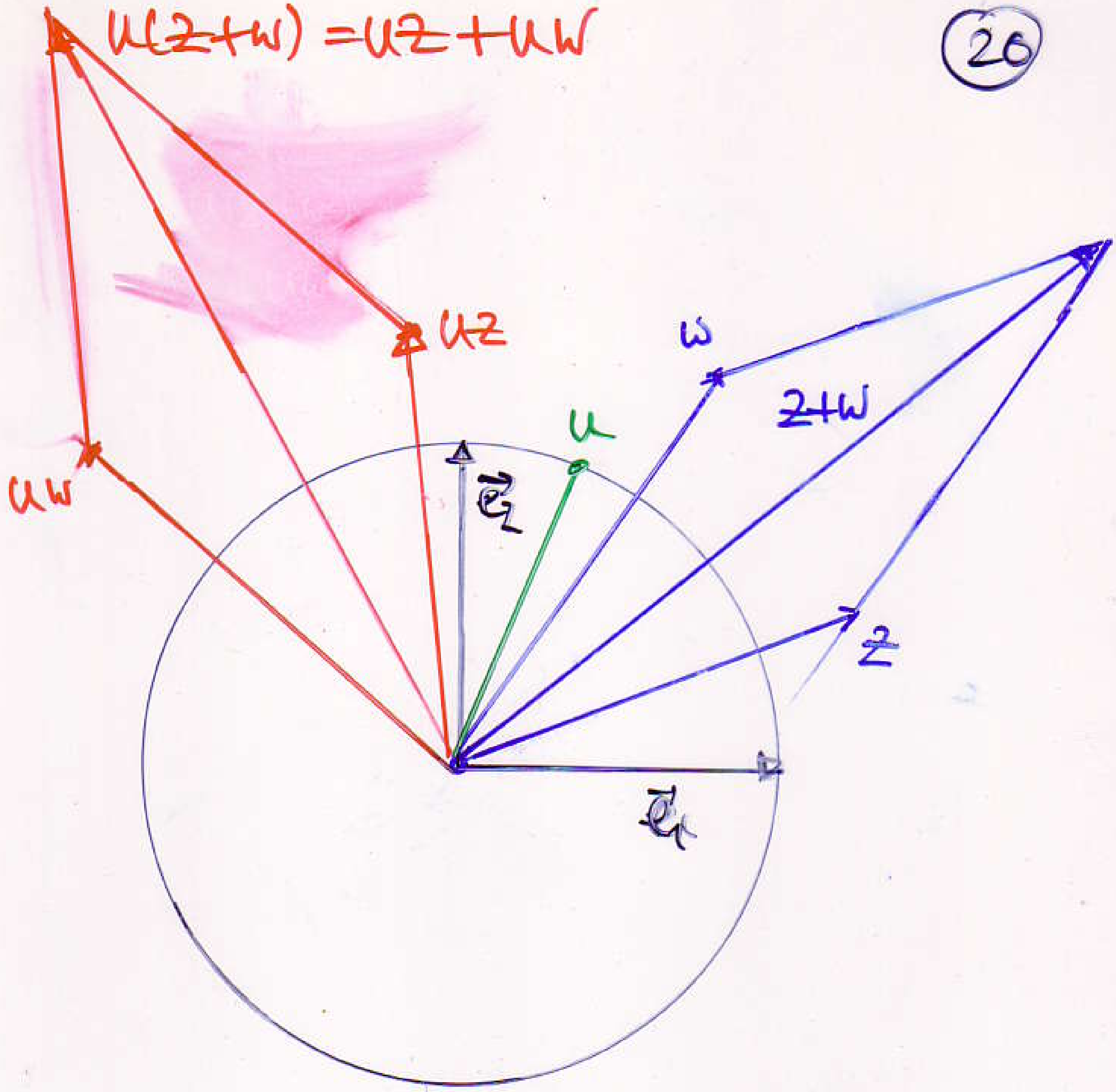
Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

= 2 dimensionaler euklidischer Vektorraum mit ausgezeichneter positiv orientierter Orthonormalbasis
und mit eben definierter Multiplikation von Vektoren

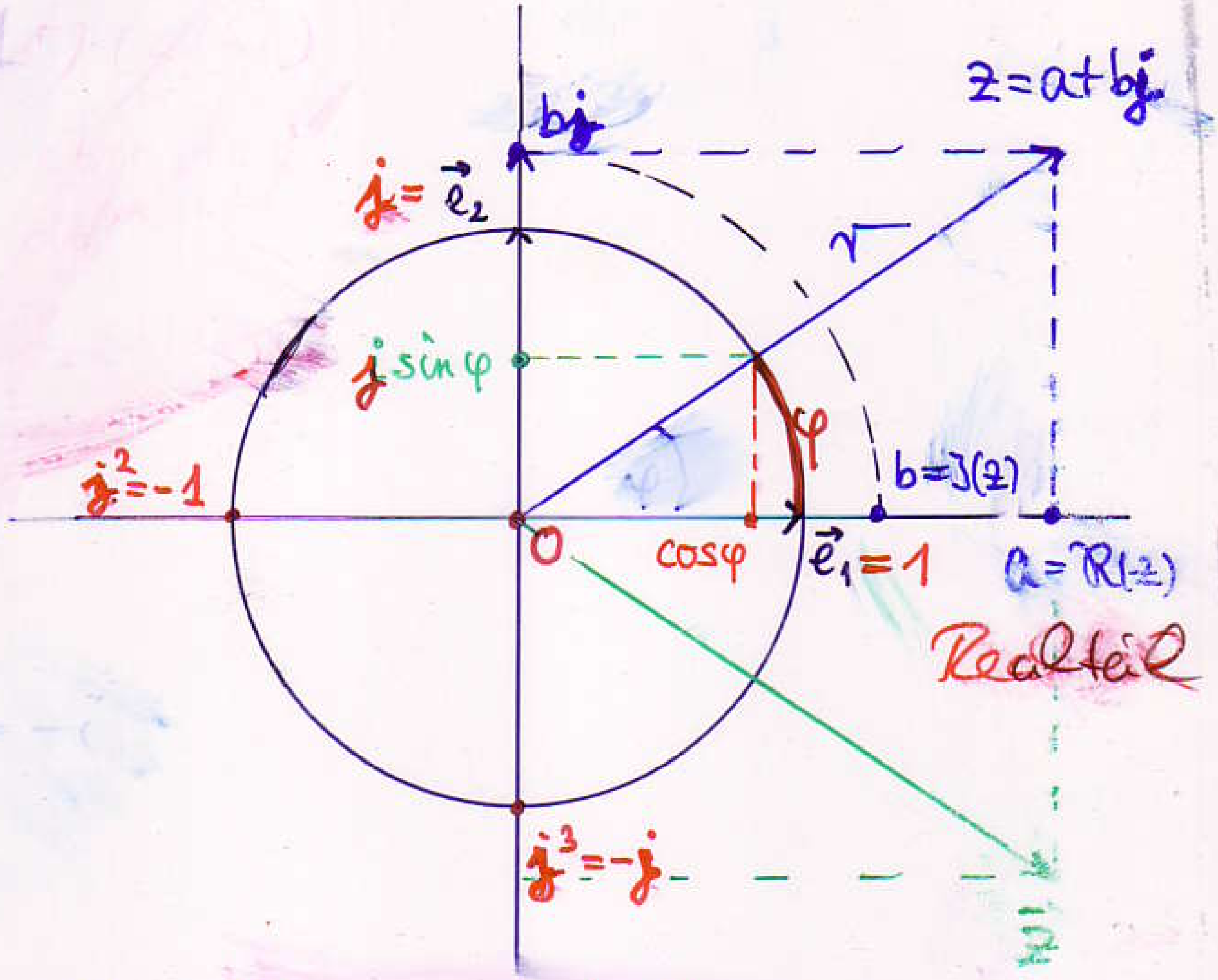
Satz: $\mathbb{C}$ ist ein Körper $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{0} = 0$

Bew. $\vec{e}_1$ Neutralelement der Multiplikation
Assoziativ- und Kommutativgesetz und Inverse: klar

Distributivgesetz:
$u = r u_0$ mit $|u_0| = 1$, $r \in \mathbb{R}$
also o.B.d.A. $|u| = 1$


u(z+w) = uz + uw
uz
uw
w
z+w
u
z
$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1$

9.3 Kartesische Darstellung



$b = \Im(z)$ Imaginärteil

Polarkoordinaten von z

$$r = \|z\| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arg(z)$$

$$z = \underbrace{r\cos\varphi}_{a} + \underbrace{r\sin\varphi}_{b} \cdot j = a + bj$$

$\varphi = \arctan b/a$ für $a > 0$

Kartesische Rechnung

$$a+bj + c+dj$$
$$= a+c + (b+d)j$$

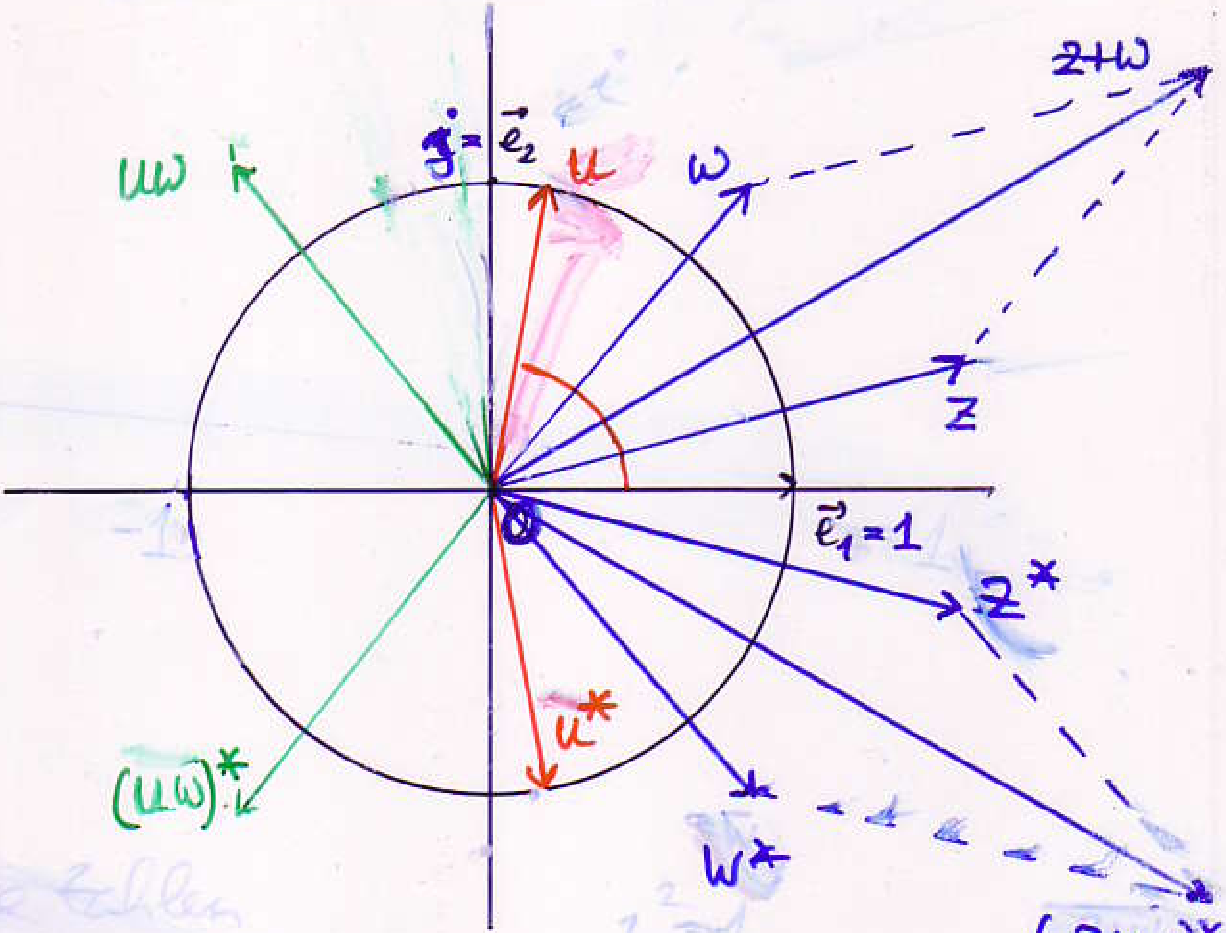
$$(a+bj)(c+dj) \qquad j^2 = -1$$
$$= ac - bd + (ad+bc)j$$

$$\frac{1}{a+bj} = \frac{a-bj}{(a+bj)(a-bj)}$$
$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}j$$

$$a^2+b^2 = |a+bj|^2$$

Konjugation $z = a + bj$

$$\mapsto z^* = \overline{z} = a - bj$$

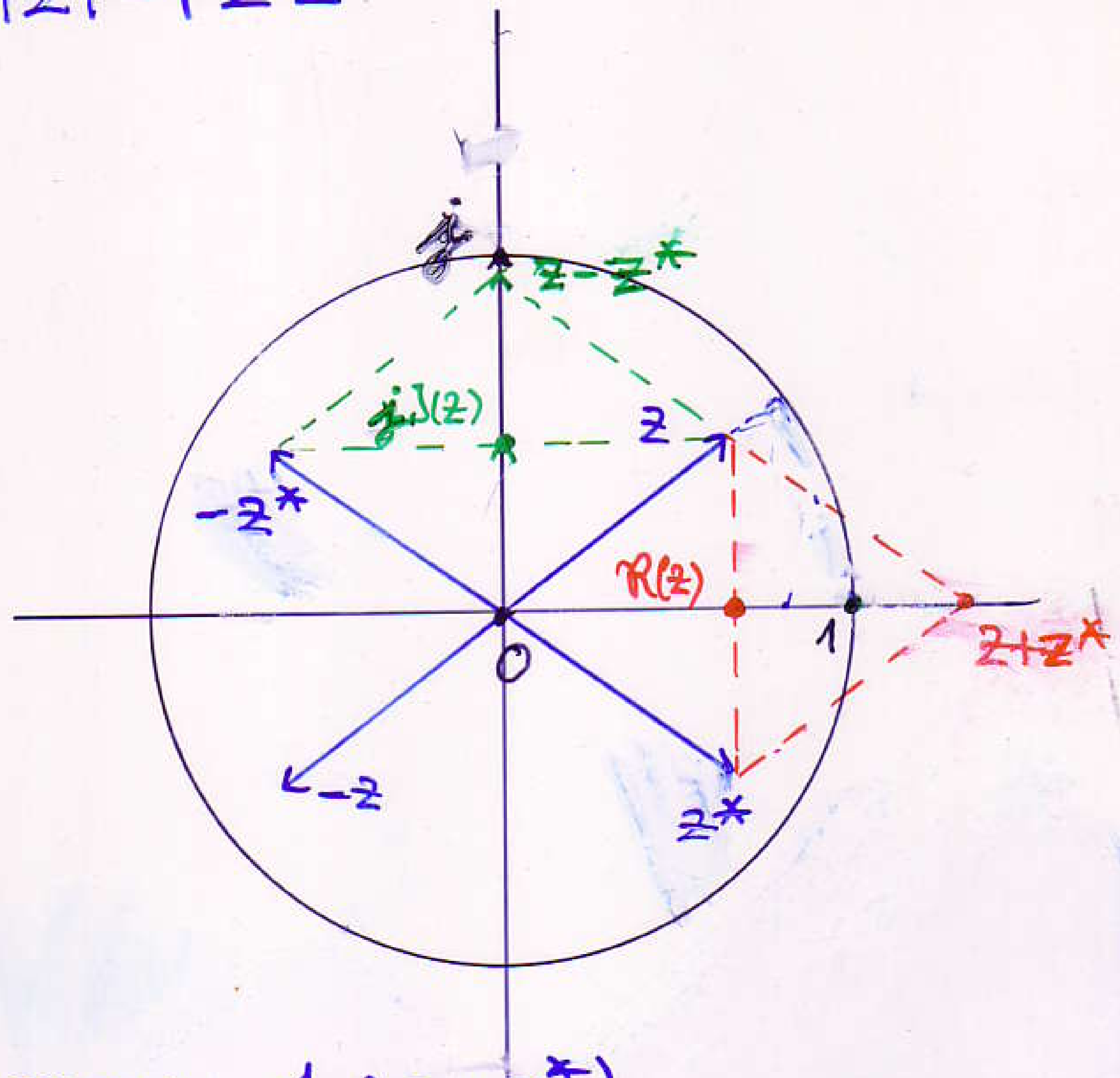


$$(z+w)^* = z^* + w^*$$

$$(zw)^* = z^* \cdot w^*$$

$$z^{**} = z$$

$$|z| = \sqrt{z z^*}$$



$$\mathfrak{R}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$\mathfrak{I}(z) = \frac{1}{2j}(z - z^*)$$