Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
f *Treppenfunktion* für $a = z_0 < z_1 \ldots < z_m = b$
$\Leftrightarrow f(x)$ konstant auf allen $]x_k, z_{k+1}[$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} f(\xi_k)(\Delta x)_k \quad \xi_k \in]x_k, x_{k+1}[$$

$(\Delta x)_k = z_{k+1} - z_k$. **Unabhängig von Zerlegung!**

f *integrierbar* $\Leftrightarrow$
Es gibt Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \overline{f}_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n \quad \forall n$$

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x \quad \to 0$$

O.B.d.A.

$$\underline{f}_n = \max\{\underline{f}_k \mid k \leq n\}, \quad \overline{f}_n = \min\{\overline{f}_k \mid k \leq n\}$$

Das *Riemann-Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ von f ist die durch die Intervallschachtelung

$$[\int_a^b \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x, \int_a^b \overline{f}_n(x)\mathrm{d}x] \; (n \in \mathbb{N})$$

bestimmte reelle Zahl
- **Nur von** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **abhängig**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{für } \frac{1}{2^k} < x < \frac{1}{2^{k-1}},\ k \geq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{f}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^k} & \text{für } \frac{1}{2^k} < x < \frac{1}{2^{k-1}},\ k \leq n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \underline{f}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^k}$$

$$\overline{f}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{für } \frac{1}{2^k} < x < \frac{1}{2^{k-1}},\ k \leq n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \overline{f}_n = 1\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^k}$$

$$\int_0^1 \overline{f}_n - \int_0^1 \underline{f}_n = 1\frac{1}{2^n} \to 0$$

$$\int_0^1 \underline{f}_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4}\frac{(\frac{1}{4})^n - 1}{\frac{1}{4} - 1}$$

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \underline{f}_n = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \sin \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{2^k} < x < \frac{1}{2^{k-1}},\ k \geq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^1 f(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{2^k}}^1 \frac{1}{2^{k+1}} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

wobei die Integrale in der Summe wegen Stetigkeit existieren. Also gibt es Treppenfunktionen

$$\underline{g}_n, \overline{g}_n : [\frac{1}{2^n}, 1] \to \mathbb{R},\ \underline{g}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{g}_n(x)$$

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^1 \overline{g}_n - \int_{\frac{1}{2^n}}^1 \underline{g}_n \leq \frac{1}{n}$$

$$\underline{f}_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2^n} \\ \underline{g}_n(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{f}_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{1}{2^n} \\ \overline{g}_n(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_n(x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\int_0^1 \overline{f}_n - \int_0^1 \underline{f}_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n} \to 0$$

Satz 15.10 *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und es gilt*

(ii) Mittelwertsatz*:*
Es gibt $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^n f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a)$.

Satz 15.13 Hauptsatz *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a, b]$, so ist die Funktion $F(\tau)$ auf $[a, b]$ differenzierbar, wobei*

$$F(\tau) = \int_c^\tau f(t)\mathrm{d}t \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\tau) = f(\tau) \quad \tau \in [a, b]$$

Korollar 15.14 *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in [a, b]$ und $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare* Stamm-Funktion *mit $\frac{\partial G}{\partial t}(\tau) = f(\tau)$ für alle $\tau \in [a, b]$, so gibt es eine Konstante C mit*

$$G(\tau) = \int_c^\tau f(t)\mathrm{d}t + C \quad \textit{für alle } \tau \in [a, b]$$

Insbesondere

$$C = G(c), \quad \int_c^\tau f(t)\mathrm{d}t = G(\tau) - G(c)$$

$$G(c) = 0 \;\Leftrightarrow\; G(\tau) = \int_c^\tau f(t)\mathrm{d}t \quad \textit{für alle } \tau \in [a, b]$$

Satz 15.19 Integrationsregel. *Seien $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar und $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ stetige Funktionen auf den jeweiligen Wertebereichen. Für die Differentiale gelte*

$$f(x)\mathrm{d}x = cg(y)\mathrm{d}y + h(z)\mathrm{d}z$$

Dann gilt:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = c\int g(y)\mathrm{d}y + \int h(z)\mathrm{d}z$$

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\mathrm{d}x = c\int_{y(a)}^{y(b)} g(y)\mathrm{d}y + \int_{z(a)}^{z(b)} h(z)\mathrm{d}z$$

Ist $y = y(x)$ und $f(x) = cg(y)\frac{\partial y}{\partial x}$, $\Rightarrow$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = c\int g(y)\mathrm{d}y, \quad \int_c^d f(x)\mathrm{d}c = c\int_{y(c)}^{y(d)} g(y)\mathrm{d}y$$

$x = x(u)$ und $u = u(x)$ $\Rightarrow$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x(u))\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u = \Phi(u(x))$$

$$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \Phi(u(d)) - \Phi(u(c))$$

$$uv = \int v\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + \int u\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}t = \int v\,\mathrm{d}u + \int u\,\mathrm{d}v$$

$$R(Z,\vec{\xi},f) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(\Delta x)_k, \quad \xi_k \in [z_k, z_{k+1}]$$

f integrierbar $\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ mit Maschenweite $\leq \delta$ und alle Zwischenvektoren $\vec{\xi}$ gilt: $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - R(Z,\vec{\xi},f)\right| \leq \varepsilon$$

Satz 15.10 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig* $\Rightarrow$*: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es* $\delta > 0$ *so, dass für alle* $a \leq c \leq d \leq b$ *mit* $d - c \leq \delta$ *und alle* $\xi \in [c,d]$ *gilt*

$$\left|\int_c^d f(x)\mathrm{d}x - f(\xi)(d-c)\right| \leq \varepsilon(d-c)$$

Theorem 15.12 Summationstheorem. *Sei* $W(a,b) \in \mathbb{R}$ *für* $a \leq b$ *definiert,* $f : I \to \mathbb{R}$ *auf* I *stetig und*

- $W(a,b) = W(a,c) + W(c,b)$ *für* c *zwischen* a, b

(∗) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *so, dass für alle* Δx *mit* $|\Delta x| \leq \delta$ *und alle* $p \in I$ *gilt:*

  - *Es gibt* $\xi \in [p, p + \Delta x]$ *mit* $|W(p, p+\Delta x) - f(\xi)\Delta x| \leq \varepsilon|\Delta x|$

Dann gilt für alle $a \leq b$ *in* I*:* $\boxed{W(a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$