

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

f integrierbar \Leftrightarrow

Es gibt Treppenfunktionen $\underline{f}_n, \bar{f}_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\underline{f}_{n-1} \leq \underline{f}_n \leq f \leq \bar{f}_n \leq \bar{f}_{n-1} \quad \forall n$$

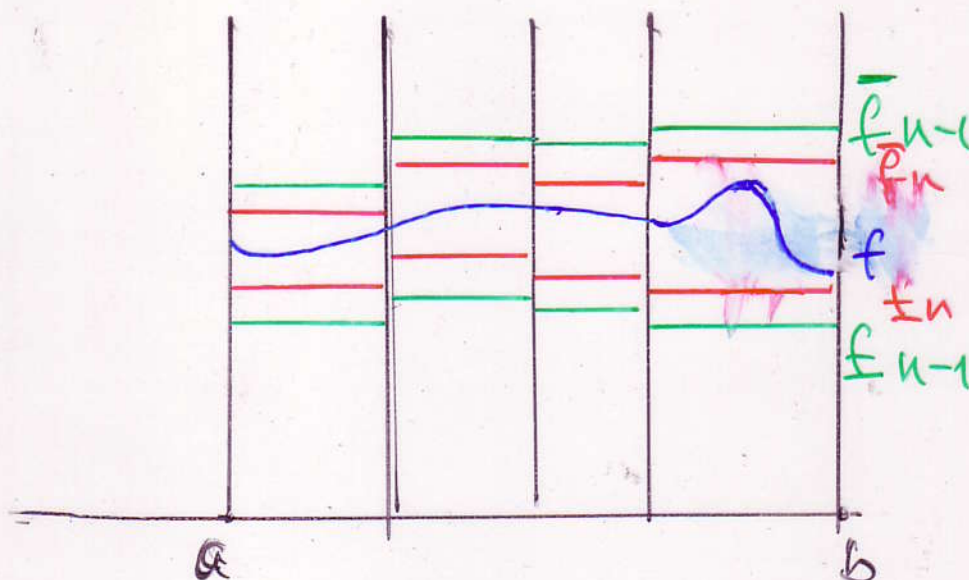
$$\int_a^b \bar{f}_n(x) dx - \int_a^b \underline{f}_n(x) dx \rightarrow 0$$

Das *Riemann-Integral* $\int_a^b f(x) dx$ von f ist die durch die Intervallschachtelung

$$\left[\int_a^b \underline{f}_n(x) dx, \int_a^b \bar{f}_n(x) dx \right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

bestimmte reelle Zahl

- und unabhängig von den Treppenfunktionen



Satz 15.13 Hauptsatz Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a, b]$, so ist die Funktion $F(\tau)$ auf $[a, b]$ differenzierbar, wobei

$$F(\tau) = \int_c^\tau f(t) dt \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau) = f(\tau) \quad \tau \in [a, b]$$

Beweis.

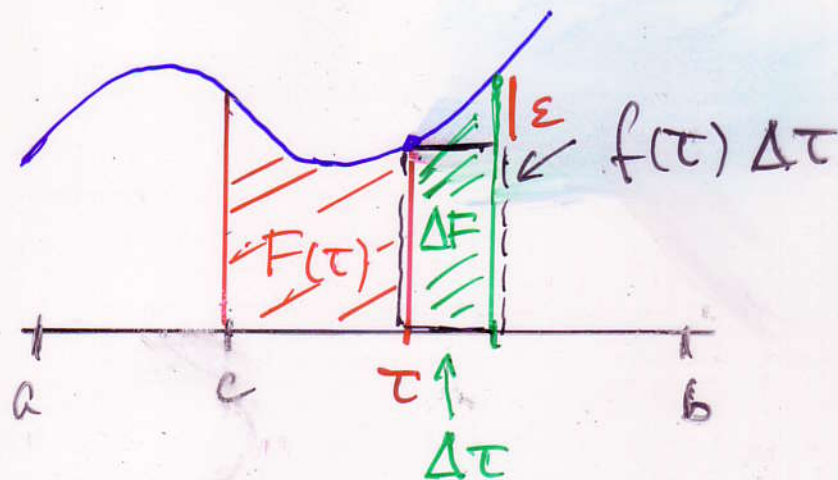
$$\Delta F(\tau, \Delta\tau) = F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau) = \int_\tau^{\tau + \Delta\tau} f(t) dt$$

Nach Satz 15.10 (i) gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für alle $|\Delta\tau| \leq \delta$ gilt

$$|F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau) - f(\tau)\Delta\tau| \leq \varepsilon |\Delta\tau|$$

und es folgt

$$\left| \frac{F(\tau + \Delta\tau) - F(\tau)}{\Delta\tau} - f(\tau) \right| \leq \varepsilon \quad \square$$



Satz 15.10 Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar und es gilt

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle $a \leq c \leq d \leq b$ mit $d - c \leq \delta$ und alle $\xi \in [c, d]$ gilt

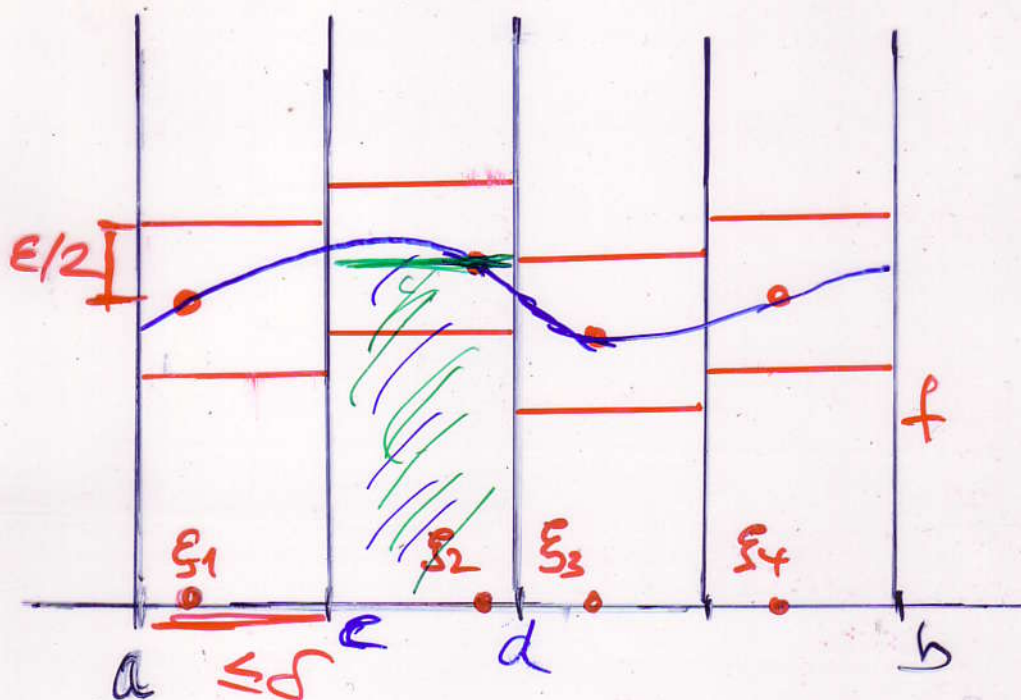
$$\left| \int_c^d f(x) dx - f(\xi)(d - c) \right| \leq \varepsilon(d - c)$$

(ii) Mittelwertsatz: Es gibt $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$.

Bew. $\varepsilon = \frac{1}{2n}$

$(b-a) \min f \leq \int f \leq (b-a) \max f$
u. Zwischenwertsatz

δ zu ε (glm. stetig)



$$\int f_n - \int f_n \leq \boxed{} \rightarrow 0$$

Gegeben eine Abbildung $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sei U_x das offene Intervall $]x - \delta(x), x + \delta(x)[$.

Eine Teilmenge D von \mathbb{R} heiße *kompakt* für δ , wenn entweder

$$D \not\subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} U_x$$

oder es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$D \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

Dabei o.B.d.A. $\delta(x_i) > 0$.

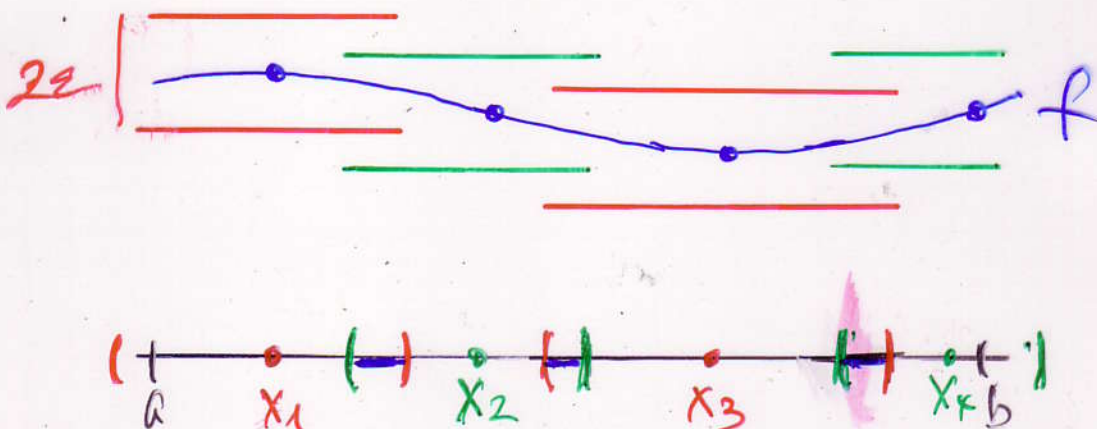
Satz 15.8 Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist kompakt bzgl. jeder Funktion δ .

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass

$$\text{für alle } x, x' \in D : |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Satz 15.9 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so auch gleichmäßig stetig.

Beo $\delta \leq \min -$



Riemannsumme von f für

Zerlegung $Z : a = z_0 < z_1 \dots < z_n = b$ und

Zwischenvektor $\vec{\xi} : \xi_k \in]z_k, z_{k+1}[$

$$R(Z, \vec{\xi}, f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\Delta x)_k$$

f integrierbar \Leftrightarrow

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für

alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit Maschenweite $\leq \delta$

und alle Zwischenvektoren $\vec{\xi}$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R(Z, \vec{\xi}, f) \right| \leq \varepsilon$$

